

**Università degli Studi di Roma “LA SAPIENZA”**

**Facoltà di Scienze Statistiche**

**Dipartimento di Scienze Attuariali e Finanziarie**

**Dottorato di Ricerca in Scienze Attuariali - XIX ciclo**  
**Settore scientifico disciplinare: Secs-S/06**

## **TESI DI DOTTORATO**

**“Gli effetti della correlazione tra i rami assicurativi sul requisito patrimoniale di un’impresa di assicurazione Rami Danni”**

**Coordinatore:**  
**Prof. Fabio Grasso**

**Candidato:**  
**Gian Paolo Clemente**

<b>1. VERSO UN NUOVO REQUISITO DI CAPITALE .....</b>	<b>3</b>
INTRODUZIONE .....	3
1.1 SOLVENCY II: LO STATO DELL'ARTE .....	4
1.2 IL CALCOLO DEL REQUISITO DI CAPITALE: L'APPROCCIO DEL CEIOPS .....	11
1.3 IL CALCOLO DEL REQUISITO DI CAPITALE: L'APPROCCIO DELL'IAA.....	16
1.4 IL SISTEMA RISK-BASED CAPITAL (RBC) STATUNITENSE .....	19
1.5 L'APPROCCIO DELLA FINANCIAL SERVICE AUTHORITY (FSA) .....	23
1.6 LO SWISS SOLVENCY TEST .....	28
CONCLUSIONI .....	31
<b>2 MISURE DI DIPENDENZA: CORRELAZIONE LINEARE E COPULE.....</b>	<b>33</b>
INTRODUZIONE .....	33
2.1 MISURE DI ASSOCIAZIONE: CORRELAZIONE, CONCORDANZA E DIPENDENZA DI CODA .....	33
2.2 LE COPULE: ASPETTI GENERALI .....	37
2.3 LE COPULE: METODI DI COSTRUZIONE .....	40
2.4 LE COPULE: STIMA DEI PARAMETRI E SIMULAZIONE .....	43
2.5 LE COPULE: ALCUNE FAMIGLIE.....	44
2.5.1 Le Copule Ellittiche .....	45
2.5.2 Le Copule Archimediane .....	49
2.5.3 Copule Archimediane Uniparametriche.....	51
2.5.4 Copule Archimediane Multiparametriche e Copule Multivariate.....	54
CONCLUSIONI .....	55
<b>3 DIFFERENTI MISURE DI RISCHIO.....</b>	<b>59</b>
INTRODUZIONE .....	59
3.1 MISURE DI RISCHIO COERENTI.....	59
3.2 ALCUNE MISURE DI RISCHIO.....	61
3.2.1 Value at Risk.....	61
3.2.2 Expected Shortfall.....	62
3.2.3 Misure di rischio distorte.....	64
3.2.4 Misure al rischio spettrali (Spectral Risk Measures).....	66
CONCLUSIONI .....	69
<b>4 UN MODELLO PER LA VALUTAZIONE DELL'IMPATTO DELLA CORRELAZIONE SUL CAPITALE A RISCHIO.....</b>	<b>71</b>
INTRODUZIONE .....	71
4.1 IL MODELLO BASE .....	72
4.2 ANALISI METODOLOGICA (LA STIMA DEI PARAMETRI).....	74
4.3 IL NUMERO DEI SINISTRI.....	77
4.4 IL COSTO AGGREGATO DEI SINISTRI.....	84
4.5 ALCUNE ANALISI DI SENSITIVITÀ .....	93
4.6 UN CONFRONTO TRA DIVERSI APPROCCI.....	96
4.7 UN CONFRONTO CON IL REQUISITO INTRODOTTO DAL QIS2 .....	100
4.8 EVENTUALI ESTENSIONI DEL MODELLO .....	104
<b>CONCLUSIONI.....</b>	<b>107</b>
<b>BIBLIOGRAFIA .....</b>	<b>112</b>

# 1. Verso un nuovo requisito di capitale

## ***Introduzione***

Gli ultimi anni hanno segnato l'avvio di un ampio processo di trasformazione che sarà al centro del dibattito assicurativo per diversi anni. L'introduzione del Basilea II relativo al settore bancario, i nuovi principi contabili internazionali (IAS) e infine il progetto Solvency II rivoluzioneranno il modo in cui gli operatori del mercato finanziario ed assicurativo gestiranno alcuni aspetti tradizionali: dalla stima di alcune voci di bilancio, alla valutazione del margine di solvibilità.

Si tratta di progetti molto ambiziosi, alcuni completati, altri ancora in fase di lavorazione, che hanno lo scopo di ridisegnare, nell'ottica di una maggiore trasparenza e rispondenza col mercato, l'intero settore finanziario-assicurativo.

Il progetto Solvency II, le cui prime basi erano già state abbozzate nel 2000, rappresenta una continuazione del processo di revisione e di armonizzazione del sistema di solvibilità iniziato con la pubblicazione delle direttive Ue del 5 Marzo 2002 (2002/12/EC per il vita e 2002/13/EC per il danni recepite in Italia dal Decreto Legislativo n.307 del 3 Novembre 2003), che ha concluso la fase del Solvency I.

In realtà il Solvency I, pur non introducendo modifiche strutturali in termini di calcolo dei requisiti minimi al regime di solvibilità introdotto negli anni settanta, ha comunque apportato utili miglioramenti come l'indicizzazione e l'incremento del fondo di garanzia e il conferimento all'autorità di vigilanza di maggiori poteri d'intervento.

Tuttavia l'esigenza, che alcuni studi avevano manifestato<sup>1</sup>, di rendere il margine minimo di solvibilità un indicatore più rispondente alla rischiosità dell'impresa, è rimasta insoddisfatta.

I notevoli cambiamenti, che hanno caratterizzato il mercato assicurativo negli ultimi anni, fra i quali ad esempio la liberalizzazione tariffaria del 1994 e le nuove norme in materia di concorrenza, i risultati tecnici di alcuni rami assicurativi e il particolare andamento dei mercati finanziari, hanno reso, così, necessaria un'analisi più attenta del rischio, cui è esposta l'impresa, e la creazione di un sistema di solvibilità più rafforzato e correlato in modo dinamico ai livelli di rischiosità dell'impresa e del mercato.

L'International Association of Insurance Supervisors (IAIS)<sup>2</sup> ha rilevato la necessità di mantenere il mercato assicurativo efficiente, equo e stabile allo scopo di proteggere e beneficiare gli assicurati.

---

<sup>1</sup> Si veda in proposito: Muller H., "Report: Solvency of Insurance Undertakings", Conference of Insurance Supervisory Authorities of the Member States of The European Union, 1999

E' stata così auspicata l'introduzione di un sistema di solvibilità da una parte flessibile ed aderente ai rischi e che permetta l'intervento preventivo e tempestivo dell'autorità di vigilanza, dall'altra comparabile e trasparente e non eccessivamente complesso e prescrittivo, evitando una penalizzazione eccessiva per alcune tipologie di imprese.

In quest'ottica nasce e si sviluppa l'intero processo di Solvency II. Il progetto porterà dunque ad una riforma significativa dell'attuale sistema dirigendosi verso un modello a tre pilastri, sulla scia di quanto accaduto con il Basilea II per il settore bancario, e interessando non solo i requisiti di capitale ma anche la vigilanza e l'informativa di mercato.

Parallelamente alcuni paesi europei, Regno Unito, Svizzera e Paesi Bassi, hanno sviluppato o stanno definendo diversi approcci di sensibilità al rischio. Come è stato rilevato dal Ceiops, il nuovo requisito di capitale dovrà tener conto dei preziosi suggerimenti che giungono sia da questi paesi, sia dal modello americano.

Nel seguito sarà così compiuta una breve panoramica sullo stato dell'arte concernente il progetto Solvency II, facendo riferimento anche all'analisi tecnica svolta dall'International Actuarial Association. Saranno poi analizzati l'approccio proposto dall'autorità di vigilanza Inglese (FSA), lo Swiss Solvency Test presentato dal FOPI e l'RBC utilizzato nel mercato americano.

In particolare ci si soffermerà più nel dettaglio sugli aspetti riguardanti le assicurazioni contro i danni e sulla valutazione del rischio di underwriting analizzando il ruolo delle correlazioni e delle misure di rischio utilizzate.

## **1.1 Solvency II: lo stato dell'arte**

Il progetto Solvency II è stato diviso in due fasi distinte: la prima, avviata nel 2001 e conclusasi due anni dopo, è stata una fase di analisi delle principali problematiche attraverso la creazione di un Insurance Committee, di due working Party, e di uno studio preliminare redatto dalla KPMG<sup>3</sup>; la seconda, più tecnica, è partita nel 2003 attraverso il coinvolgimento dell'Insurance Commission (IC), con funzione legislativa, e del Committee of European Insurance and Occupational Pension Supervisors (CEIOPS) con funzione consultiva.

Questo nuovo organismo, che comprende un segretariato con sede a Francoforte e un insieme di gruppi di lavoro composti da membri delle autorità di vigilanza di tutti i paesi della Ue, funge da

---

<sup>2</sup> Si veda in proposito: "Principles on Capital Adequacy and Solvency", International Association of Insurance Supervisors, Gennaio 2002 e "La concezione di un futuro sistema di vigilanza prudenziale nella UE", Nota Elaborata dai Servizi della commissione, 3 Marzo 2003

<sup>3</sup> Si veda in proposito: "Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision", Kpmg, Maggio 2002



intermediario tra la IC e il settore delle assicurazioni e, di fatto, crea una serie di regole che la Commissione ratificherà e trasmetterà ai legislatori europei.

Durante la prima fase è stato delineato un primo quadro di riferimento entro il quale si sarebbe poi dovuto svolgere l'intero progetto Solvency II. In particolare è stata sottolineata<sup>4</sup> la necessità di rivedere l'attuale requisito di solvibilità dirigendosi verso un sistema in grado di cogliere i principali rischi ai quali sono esposti gli assicuratori, ma nello stesso tempo sia semplice, flessibile, modificabile e compatibile con i metodi di controllo delle autorità di vigilanza e con i principi contabili.

I principali temi sono rappresentati dalla definizione dei requisiti necessari ad un idoneo sistema di Solvency, dal confronto con i principali sistemi esteri, in particolare RBC, dall'analisi dell'iniziativa previste da settori attigui, principalmente il Basilea II, dalla misurazione dell'impatto dell'introduzione degli IAS.

Le numerose problematiche sollevate dalla Commissione vengono affidate all'analisi di uno studio redatto dalla Kpmg e pubblicato in data 2 Maggio 2002.

Fra i numerosi aspetti analizzati dallo studio sicuramente meritano una citazione:

- l'analisi dei rischi che gravano sulle compagnie di assicurazione, con l'introduzione accanto al rischio di underwriting e ai rischi di mercato, di alcuni rischi fino ad ora trascurati come il rischio di credito e il rischio operativo;
- l'analisi della possibilità di calcolare le riserve sinistri utilizzando basi scontate;
- l'analisi del possibile impatto derivante dall'introduzione degli Ias ed in particolare degli effetti, derivanti dalla nuova definizione di contratto assicurativo, caratterizzati dalla valutazione degli strumenti finanziari secondo lo Ias32 e dalla valutazione al fair value delle opzioni incorporate in alcuni contratti;
- la necessità di identificare un sistema che meglio tenga in considerazione gli effetti derivanti dal ricorso alla riassicurazione e dalle tipologie di trattati utilizzati;
- la comparazione tra un sistema di solvibilità di tipo "fixed ratio", l'RBC americano, un sistema basato sull'analisi degli scenari ed infine l'utilizzo di un modello interno. Sono così contrapposti sistemi, come quello Europeo ed in parte l'RBC, caratterizzati da una relativa semplicità, poco legati all'effettiva rischiosità dell'impresa, con scarso potere predittivo e generalmente concentrati sulla valutazione dell'underwriting risk, con metodologie notevolmente più complesse ma nello stesso tempo decisamente più flessibili e più correlate all'effettiva rischiosità del mercato.

---

<sup>4</sup> Si veda in proposito: "Nota per il sottogruppo Solvibilità del Comitato delle Assicurazioni, Solvibilità 2 Presentazione dei lavori previsti", European Commission, MARKT/2007/01

L'analisi del Basilea II propone infine un possibile modello di solvibilità basato su una struttura a tre pilastri: tale forma rappresenterà la guida su cui si baserà l'intero progetto Solvency.

Il primo pilastro è costituito da regole quantitative e principi generali circa gli investimenti, le riserve tecniche, i mezzi patrimoniali propri. Saranno così definite opportune metodologie per garantire:

- l'adeguatezza degli accantonamenti tecnici, valutando i metodi di stima delle riserve tecniche, anche nell'ottica dei nuovi principi contabili, e l'eventuale effetto delle riserve di equilibrio/perequazione;
- l'adeguatezza degli investimenti, sia rivedendo i vincoli previsti dalla normativa in termini di concentrazione degli investimenti, sia eventualmente incorporando nella formula di calcolo del margine minimo un indicatore che tenga conto della rischiosità degli asset, come proposto ad esempio dal Muller Working Party;
- nuove regole per la determinazione del capitale proprio della compagnia, prevedendo due livelli obbligatori di capitale, un capitale minimo ed un target capital valutato sulla base della rischiosità delle singole imprese, e definendo opportune misure di rischio, intervalli di confidenza e orizzonti temporali.

Il secondo pilastro riguarderà tutto ciò che concerne il processo di vigilanza prendendo spunto probabilmente sia dal Basilea II, sia dal sistema RBC americano stabilendo una serie di principi che regolino il controllo interno, l'organizzazione amministrativa e la gestione dei rischi.

Prevedrà anche l'introduzione di diversi livelli d'intervento determinati in misura percentuale sulla base di un opportuno indicatore fissato probabilmente in misura percentuale rispetto al target capital e introducendo soglie d'intervento anche superiori al 100% del target capital.

Il terzo riguarderà la disciplina di mercato, la trasparenza, la comparabilità delle informazioni finanziarie delle compagnie, la corretta informazione agli assicurati.

La diffusione di informazioni costituirà una parte fondamentale del futuro sistema di solvibilità: indicazioni in merito verranno definite in funzione di quanto si stabilirà nel primo e nel secondo pilastro.

Sicuramente saranno d'aiuto le esperienze che nel frattempo si matureranno nell'ambito bancario con il Basilea II.

La seconda fase del progetto Solvency II si sta svolgendo secondo il modello Lamfalussy, in cui il Ceiops riceverà delle richieste di parere dalla Commissione. All'interno del Ceiops i diversi gruppi hanno preparato nel corso del 2005 le regole in consultazione con il settore delle assicurazioni e con il comitato Europeo delle Assicurazioni (CEA) per rispondere alla Commissione con delle raccomandazioni.

Si tratta di una fase particolarmente articolata che comprende uno scambio di informazioni tra diversi organismi e con gli operatori di mercato. Di conseguenza nell'aprile 2005 sono state pianificate le diverse tappe attraverso una "roadmap"<sup>5</sup>, che sarà aggiornata gradualmente.

L'intera pianificazione dovrà concludersi con la pubblicazione di una Direttiva, probabilmente suddivisa tra Ramo Vita, Ramo Danni e Gruppi assicurativi, supportata da una serie di Studi di impatto Quantitativo, la cui redazione è proposta per Ottobre 2007.

La prima parte del lungo processo verso la pubblicazione della direttiva è stata caratterizzata da tre richieste di pareri da parte della Commissione e dalle rispettive risposte da parte del Ceiops, in seguito allo scambio di informazioni con gli operatori di settore e con la CEA.

I tre blocchi di "Call for advice" hanno riguardato:

- controlli interni e gestione del rischio, processo di controllo dei supervisori, gestione degli investimenti e ALM;
- valutazione delle riserve tecniche nelle assicurazioni vita e danni, misure di sicurezza, requisito di capitale (formula standard e modelli interni), riassicurazione, potere di intervento delle autorità di vigilanza, studi quantitativi;
- elementi per coprire i requisiti di capitale, cooperazione tra autorità di vigilanza, trasparenza, informazioni finanziarie e disciplina di mercato.

Può essere interessante soffermarsi su alcuni aspetti sottolineati dal Ceiops nella risposta alla seconda richiesta della Commissione. In particolare è emersa la necessità di una valutazione prudente delle riserve tecniche nei rami danni, tale valutazione verrà probabilmente effettuata su basi scontate ispirandosi al metodo proposto dall'Australian Prudential Regulation Authority (APRA) e prevedendo il calcolo del valore attuale atteso più un "risk margin", fissato probabilmente al 75° percentile e che non potrà in ogni caso essere inferiore a metà del coefficiente di variabilità. Il Ceiops produrrà uno studio di Impatto Quantitativo in cui saranno valutati alcuni aspetti previsti dal metodo Australiano e alcune varianti. In particolare fra le proposte verrà valutato un risk margin basato sul 90° percentile, la possibilità o meno di utilizzare basi scontate e l'effetto dell'aggregazione tra più linee di business sul risk margin.

Per quanto riguarda i requisiti di capitale viene confermato l'orientamento verso un Minimum Capital Requirement (MCR), calcolato sulla base di una formula semplice e che svolga la funzione di livello di sicurezza, ed un Solvency Capital Requirement (SCR) che rifletta il livello di capitale che un assicuratore dovrebbe possedere prefissato un livello di confidenza e un orizzonte temporale, calcolato con un approccio going-concern. Sarà infine valutata la possibilità di introdurre un

---

<sup>5</sup> Si veda in proposito: "Solvency 2 Roadmap – Towards a framework directive" European Commission, MARKT2502/05 del 8 Aprile 2005 e Updated Version MARKT2502/05 rev.2 – del Luglio 2005

indicatore calibrato su un orizzonte temporale più lungo che svolga una funzione di warning facilitando la possibilità d'intervento dell'autorità di vigilanza.

Il requisito MCR dovrà essere robusto, semplice e facilmente confrontabile, e probabilmente si baserà su una formula simile a quella prevista attualmente per il calcolo del Margine di solvibilità. Verranno però vagliate, anche tramite studi di impatto quantitativo, sia la possibilità di un'estensione di tale formula per incorporare l'asset risk sia l'adozione di misure alternative come l'utilizzo di una formula semplificata simile a quella utilizzata per l'SCR o la valutazione di un margine di rischio legato alle riserve tecniche.

Anche i principali operatori del settore<sup>6</sup> concordano sulla necessità di un requisito che preveda una struttura di calcolo non eccessivamente complicata ma nello stesso tempo robusta e comparabile.

Gli operatori, ed in particolare il CEA, propendono inoltre per una misura che riprenda l'attuale formula Margine Minimo di Solvibilità, eventualmente adottata in via transitoria senza modifiche, trasferendo al futuro opportune correzioni.

Il Solvency Capital Requirement verrà invece probabilmente calcolato attraverso una formula standard basata sulla combinazione tra un Factor-Based Approach e uno Scenario-Based Approach. Verrà infine probabilmente prospettata la possibilità alternativa di utilizzo di eventuali Internal Risk Models per una valutazione più accurata del business di un'impresa rispetto alla formula standard. Tali modelli sicuramente più complessi da implementare rispetto ad una formula standard hanno un non indifferente vantaggio in termini di flessibilità e dinamismo, rendendosi, se ben calibrati, nel lungo periodo più aderenti alla realtà dell'impresa, rispetto ad una formula standard, che non può essere rivista frequentemente dall'autorità di vigilanza.

La soluzione sembra dunque un mix tra un approccio basato sull'applicazione di parametri di rischio, identici o variabili per tipologia di impresa, ad alcune voci dell'impresa, ed un approccio caratterizzato dalla valutazione dell'impatto di diversi scenari, statici o dinamici e variabili per tipologia di rischio, sul patrimonio dell'impresa.

Occorre, in ogni modo, sottolineare che numerosi aspetti restano ancora da stabilire. Sia nel caso di adozione della formula standard, sia nel caso di utilizzo di eventuali modelli interni occorrerà stimare opportunamente i fattori di rischio da utilizzare, fissando la probabilità di rovina (probabilmente pari allo 0,5%) e l'orizzonte temporale (1 anno). Occorrerà inoltre definire un'univoca misura di rischio da utilizzare (Var o TailVar<sup>7</sup>).

Sarà, infatti, necessario scegliere uno strumento opportuno per modellizzare le dipendenze: probabilmente si propenderà per l'utilizzo del coefficiente di correlazione lineare scelto in modo

---

<sup>6</sup> Si veda in proposito: "Summary on Comments on CEIOPS-CP-04/05", CEIOPS, SEC-86/05

<sup>7</sup> Le specifiche tecniche del QIS2 parlano di un requisito corrispondente ad un TailVar al livello del 99%

conservativo per considerare implicitamente l'eventuale sottostima di quest'indicatore in caso di rischi altamente asimmetrici.

Nel caso degli internal models, che come già detto rappresentano un possibile vantaggio sia per gli operatori, sia per le autorità di vigilanza, occorre invece definire una metodologia di applicazione e approvazione. Potenzialmente si sta valutando la possibilità di un uso parziale e temporaneo dei modelli interni per alcune tipologie di rischio prevedendo successivamente un utilizzo definitivo, con lo scopo di evitare il "cherry-picking risk": rischio che l'impresa scelga tra i due sistemi ogni anno unicamente sulla base dello "sconto" di capitale.

Con riferimento al requisito SCR e agli internal models, i commenti presentati dagli operatori risultano decisamente variegati, fra i più significativi si possono citare:

- il CEA propende per l'approccio proposto dal Ceiops proponendo come misura di rischio il Var ad un livello del 99,5%, e suggerendo la possibilità per le compagnie di optare per il TailVar in caso di utilizzo degli internal models. Viene inoltre sottolineata la necessità di un approccio che preveda il calcolo di un SCR relativamente semplice e uno approccio a scenari più articolato.
- Gli Attuari Inglesi propongono una formula particolarmente dettagliata per la stima dell'underwriting risk e del reserve risk da considerare nel calcolo dell'SCR. Fra gli aspetti più interessanti occorre sottolineare l'applicazione di differenti fattori di rischio ai diversi trattati di riassicurazione e l'applicazione di diversi fattori alla riserva sinistri da liquidare e alla quota relativa agli IBNR. E' infine sottolineata la necessità di cogliere le dipendenze sia tra le diverse linee di business, sia tra le diverse tipologie di rischio e viene proposta la stima di una matrice di correlazione tra le classi. E' condivisa la propensione del Ceiops per il TailVar sebbene viene evidenziato che la mancanza di dati può creare non poche difficoltà nella calibratura dei fattori di rischio.
- Altri organismi come il CRO, il Group Consultatif e la Watson Wyatt propendono per l'adozione del Var con un intervallo di confidenza del 99,5%. E' inoltre sottolineata la necessità di calibrare l'intervallo di confidenza alla luce delle decisioni che verranno stabilite in termini di riserve tecniche, evitando un eventuale doppio computo del risk margin. I due organismi rilevano infine che non sussiste l'esigenza di un eventuale "cuscino" per tener conto della sottostima della correlazione derivante dall'utilizzo dei coefficienti lineari.
- I principali operatori del settore sono infine concordi sulla necessità di sviluppare opportuni modelli interni, poiché sono caratterizzati da elevata flessibilità e rappresentano un importante sistema di gestione interna del rischio per le compagnie. Risulta inoltre

necessaria una valutazione approfondita dei processi di validazione dei modelli e degli strumenti per evitare il “cherry-picking risk”.

Mentre sta volgendo al termine la preparazione del documento riassuntivo relativo alla terza ed ultima Call for Advice, la Commissione preparerà una proposta di direttiva quadro al legislatore ed il Ceiops sta dando inizio ad una serie di Studi di Impatto Quantitativo (QIS) che serviranno da supporto per la redazione della direttiva.

E’ stato dato inizio negli ultimi mesi del 2005 al QIS1, terminato nel Marzo 2006, con lo scopo di testare i livelli di prudenza delle riserve tecniche al variare di determinate ipotesi.

In particolare, facendo riferimento al mercato danni, i dati raccolti, prevedono per le compagnie il calcolo delle riserve per le linee di business utilizzando il raggruppamento in 11 categorie proposto dal Ceiops.

Il calcolo delle riserve dovrà essere fatto sulla base delle normative presenti nei diversi stati per tutte le riserve previste al lordo e al netto della riassicurazione.

Dovranno inoltre essere calcolate la riserva premi e sinistri, al lordo e al netto della riassicurazione secondo i seguenti metodi, sia con basi scontate utilizzando la struttura dei tassi fornita dal Ceiops<sup>8</sup>, sia con basi non scontate:

- best estimate (media preferibilmente, o 50° percentile)
- 75° percentile
- 90° percentile
- in modo facoltativo: valutazione personale del risk margin da parte della compagnia e 60° percentile.

312 imprese, di cui 190 operanti nei rami danni, hanno partecipato al QIS1, coprendo circa il 45% dell’intero mercato; occorre comunque sottolineare che lo studio non può essere rappresentativo dell’intero mercato europeo perché alcuni stati hanno aderito solo in misura molto ridotta, mentre in altri stati si è osservata un’adesione quasi totale. Lo stesso Ceiops ha riconosciuto che tale analisi è soggetta a numerose limitazioni, sia per l’orizzonte temporale ridotto, sia per la novità dell’approccio seguito. Molte imprese, infatti, non hanno fornito tutti i dati richiesti, e raramente hanno fornito indicazioni supplementari facoltative.

In ogni caso è emerso che generalmente la best estimate fornisce per i rami danni, riserve inferiori a quelle calcolate sulla base delle attuali normative, e spesso anche il risk margin risulta molto contenuto portando a riserve comunque inferiori.

Molto significativo risulta invece l’impatto derivante dall’introduzione di basi scontate nel calcolo della riserva: in molti stati si osserva una riduzione della riserva di circa il 10-15%.

---

<sup>8</sup> Si veda in proposito: “QIS1 Term Structures”, Quantitative Impact Study 1, CEIOPS

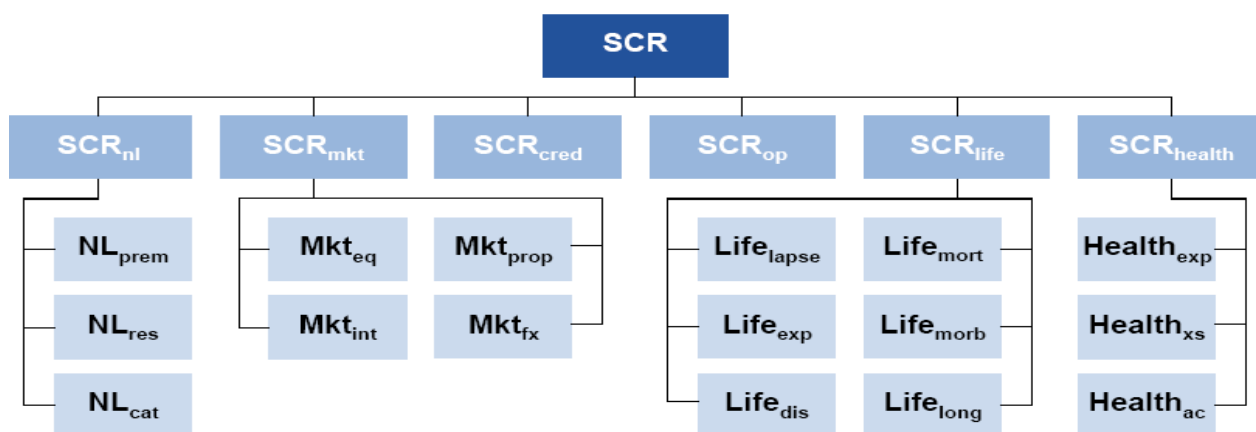
## 1.2 Il calcolo del Requisito di Capitale: l'approccio del CEIOPS

Nelle specifiche tecniche associate allo studio d'impatto quantitativo QIS2, che ha avuto inizio dal 22 Marzo 2006, è individuata una prima struttura di calcolo del requisito di capitale.

Tale struttura è stata progressivamente rivista giungendo alle specifiche tecniche definitive<sup>9</sup>: sulla base di quest'ultime è stato compiuto l'intero studio, richiedendo ai partecipanti di sviluppare diverse ipotesi che agevolassero la fase successiva<sup>10</sup> di calibratura dei coefficienti.

Come si può osservare dalla figura 1 il requisito di capitale è ottenuto dalla combinazione dei requisiti relativi alle diverse tipologie di rischio individuate dalla Commissione Europea e dal Ceiops stesso.

**Figura 1: Struttura del requisito di Capitale Scr delineate dal Ceiops. Fonte: "Quantitative Impact study n.2"**



I rischi dovranno essere aggregati considerando tre diversi scenari:

- correlazione:  $SCR_1 = \sqrt{\sum_{rxc} CorrSCR^{rxc} \cdot SCR_r \cdot SCR_c}$
- indipendenza:  $SCR_2 = \sqrt{SCR_{nl}^2 + SCR_{cred}^2 + SCR_{mkt}^2 + SCR_{op}^2 + SCR_{health}^2 + SCR_{life}^2}$
- senza effetto della diversificazione:

$$SCR_3 = SCR_{nl} + SCR_{cred} + SCR_{mkt} + SCR_{op} + SCR_{health} + SCR_{life}$$

Il requisito di capitale complessivo, ottenuto attraverso l'aggregazione tra i rami, sarà definito Basic SCR (BSCR) e la modalità di aggregazione più plausibile sarà l'approccio che tiene in considerazione la correlazione tra i diversi rischi attraverso la matrice  $CorrSCR^{rxc}$  riportata nel seguito.

<sup>9</sup> Si veda: "Technical Specification, Quantitative Impact Study n.2", CEIOPS-PI-08-06 Ultima Versione Maggio 2006

<sup>10</sup> Probabilmente la calibratura e la risoluzione di alcune problematiche emerse nel corso dello svolgimento del Qis2 saranno risolte entro il 1 Aprile 2007 data in cui sarà proposto un terzo studio di impatto quantitativo.

Nelle specifiche tecniche viene unicamente individuato il livello di correlazione, basso (L), medio-basso (ML), medio (M), medio-alto(MH), delegando alle imprese il compito di individuare i coefficienti più appropriati.

<i>CorrSCR=</i>	<i>SCR<sub>mkt</sub></i>	<i>SCR<sub>cred</sub></i>	<i>SCR<sub>life</sub></i>	<i>SCR<sub>health</sub></i>	<i>SCR<sub>nl</sub></i>	<i>SCR<sub>op</sub></i>
<i>SCR<sub>mkt</sub></i>	1					
<i>SCR<sub>cred</sub></i>	MH	1				
<i>SCR<sub>life</sub></i>	ML	ML	1			
<i>SCR<sub>health</sub></i>	ML	ML	ML	1		
<i>SCR<sub>nl</sub></i>	ML	M	L	L	1	
<i>SCR<sub>op</sub></i>	M	ML	ML	ML	M	1

Il requisito di capitale previsto per l'impresa sarà ottenuto considerando accanto al BSCR anche la capacità dell'impresa di mitigazione dei rischi (RPS) e del surplus atteso per l'anno successivo per la componente non-life (NL\_PL):  $SCR = BSCR - RPS - NL\_PL$

In particolare il fattore RPS sarà calcolato moltiplicando l'ammontare delle riserve tecniche collegate a discrezionali benefit futuri ( $TP_B$ ) per il "Key factor" (K).

Il fattore K, la cui introduzione ha dato adito a numerose interpretazioni e controversie, rappresenta la proporzione di rischio assorbita, assume valori nell'intervallo (0,1) e dipende da diversi aspetti, fra i quali la presenza di vincoli statutari e legali che impediscono l'uso dei benefit futuri per assorbire le perdite, la capacità di azione del management nelle circostanze avverse, le aspettative degli assicurati, ecc.

Il surplus atteso derivante dal business dell'anno successivo viene calcolato, unicamente per i rami danni, sommando il surplus/deficit derivante dai premi del prossimo anno al surplus/deficit derivante dal run-off dell'anno successivo:  $NL\_PL = NL\_PL_{prem} + NL\_PL_{res}$

In cui la parte relativa ai premi dell'anno successivo è ottenuta sulla base della formula seguente:

$$NL\_PL_{prem} = (100\% - u)P$$

dove:

- $P = \sum_{lob} P_{lob}$  indica i premi di competenza netti stimati per gli anni futuri, calcolati come somma dei premi netti relativi alle diverse linee di business stimati per gli anni futuri. Tali premi saranno pari al 105% dei premi dell'anno precedente qualora la variazione sia inferiore al 5%.

- $u = \frac{\sum_{lob} u_{lob} P_{lob}}{P}$  rappresenta la stima del valore atteso del combined ratio per l'intero business.

Tale stima è ottenuta attraverso la media pesata dei combined ratio netti degli ultimi anni,

$$u_{lob} = \frac{\sum_y P_{lob,y} CR_{lob,y}}{\sum_y P_{lob,y}}, \text{ con il vincolo che il numero di anni considerati sia compreso tra 3 e 5.}$$



$NL\_PL_{res} = \mu PCO$  indica, invece, il surplus o il deficit atteso derivante dal risultato di run-off del prossimo anno basato sulla stima del valore atteso del risultato di run-off per l'intero business:

$$\mu = \frac{\sum_{lob} \mu_{lob} PCO_{lob}}{PCO}.$$

Tale valore atteso è ottenuto attraverso la media ponderata dei  $\mu_{lob} = \frac{1}{D} \cdot \frac{RM_{lob}}{PCO_{lob}}$  dove D rappresenta la durata media della riserva sinistri relativa alla linea di business e RM il risk margin relativo alla riserva tecnica della linea di business.

Per il calcolo del requisito SCR relativo ad ogni modulo viene poi stabilita la metodologia di calcolo introducendo i concetti di fattori di rischio e di correlazione tra i diversi sotto rischi presenti.

#### a) UNDERWRITING RISK

Dato l'obiettivo del presente lavoro nel seguito ci si soffermerà unicamente sulla metodologia prevista per la quantificazione dell'underwriting risk nei rami danni.

Tale rischio viene definito il rischio specifico derivante dalla stipula di contratti assicurativi contro i danni ed è ripartito in tre sotto rischi, riserve risk ( $NL_{res}$ ), premium risk ( $NL_{prem}$ ) e cat risk ( $NL_{CAT}$ ), attraverso la formula seguente:

$$SCR_{nl} = \sqrt{\sum_{rxc} CorrNL^{rxc} \cdot NR_{r,vol} \cdot NL_{c,vol}}$$

in cui il requisito di capitale è ottenuto ipotizzando correlazione positiva tra premium e riserve risk ed incorrelazione tra il Cat Risk e le altre tipologie:

$CorrNL =$	$NL_{res}$	$NL_{prem}$	$NL_{CAT}$
$NL_{res}$	1		
$NL_{prem}$	0.5	1	
$NL_{CAT}$	0	0	1

#### b) PREMIUM RISK

Per la stima del "premium risk" vengono proposti due differenti approcci.

Il primo, più semplice, è basato sulla stima della volatilità di mercato, ottenuta attraverso la determinazione del seguente fattore:  $NL_{prem} = \rho(\sigma_M) \cdot P$

dove:

-  $P = \sum_{lob} P_{lob}$  indica i premi di competenza netti stimati per gli anni futuri, calcolati come somma dei premi netti relativi alle diverse linee di business stimati per gli anni futuri. Tali premi saranno pari al 105% dei premi dell'anno precedente qualora la variazione sia inferiore al 5%.

-  $\rho(.)$  indica la seguente trasformazione  $\rho(x) = \frac{0.99 - \phi(N_{0.99} - \sqrt{\log(x^2 + 1)})}{0.01}$  con  $\phi$  funzione di ripartizione della normale standard e  $N_{0.99}$  quantile della normale standard al livello del 99%.

-  $\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{P^2} \sum_{r,c} CorrLob\_Prem^{rxc} \cdot P_r \cdot P_c \cdot \sigma_{M,r} \cdot \sigma_{M,c}}$  indica la deviazione standard del combined ratio calcolata considerando la volatilità di mercato dei singoli rami e le correlazioni tra essi attraverso la seguente matrice:

CorrLob_Prem=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1: A & H	1										
2: M (3 <sup>rd</sup> party)	0.25	1									
3: M (other)	0	0.5	1								
4: MAT	0	0	0.5	1							
5: Fire	0	0	0.5	0.25	1						
6: 3 <sup>rd</sup> party liab	0.25	0	0	0	0	1					
7: credit	0	0	0	0	0	0.75	1				
8: legal exp.	0.5	0.25	0	0	0	0.5	0.75	1			
9: assistance	0	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	1		
10: misc.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
11: reinsurance	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	1

$\sigma_{M,r}$  e  $\sigma_{M,c}$  indicano le deviazioni standard del combined ratio relative alle diverse linee di business, con  $\sigma_{M,lob} = sf \cdot f_{lob}$  pari al prodotto di

$$\text{un fattore di scala } sf = \begin{cases} 1 & \text{se } P_{lob,gross} \geq 100m \\ \frac{10}{\sqrt{P_{lob,gross} \cdot 10^{-6}}} & \text{se } 100m > P_{lob,gross} \geq 20m \\ \frac{10}{\sqrt{20}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e del fattore di volatilità specifico della linea di business:

LOB =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_{lob}$	0.05	0.125	0.075	0.15	0.10	0.25	0.10	0.15	0.10	0.15	0.15

Il secondo approccio è analogo al primo, ad eccezione della stima della standard deviation del combined ratio, ottenuta sulla base di un fattore di credibilità e della serie storica dei combined ratio.

La standard deviation sarà infatti ottenuta nel modo seguente:  $\sigma_{U,lob} = \sqrt{c_{lob}\sigma_{cr,lob}^2 + (1-c_{lob})\sigma_{M,lob}^2}$

dove

- il coefficiente di credibilità sarà pari a  $0,2 \cdot \max(0, j-10)$ , con j numero di combined ratio disponibili

- la stima della standard deviation del singolo ramo sarà:  $\sigma_{cr,lob} = \sqrt{\frac{1}{j-1} \sum_y P_{lob,y} (CR_{lob,y} - \mu_{lob})^2}$

### c) RESERVE RISK

Analogamente a quanto appena descritto per il premium risk, il rischio di riserva sarà ottenuto sulla base della seguente formula:  $NL_{res} = \rho(\sigma) \cdot PCO$ .

Dove:

- $PCO$  indica le riserve sinistri al netto della riassicurazione con riferimento a tutte le linee di business

- $\rho(.)$  indica la funzione definita in precedenza

- $\sigma = \sqrt{\frac{1}{PCO^2} \sum_{r,c} CorrLob_{Res}^{rc} \cdot PCO_r \cdot PCO_c \cdot \sigma_r \cdot \sigma_c}$  indica la deviazione standard dei risultati

di run-off per gli anni futuri utilizzando la seguente matrice di correlazione<sup>11</sup>

CorrLob=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1: A & H	1										
2: M (3 <sup>rd</sup> party)	0.25	1									
3: M (other)	0	0.5	1								
4: MAT	0	0	0.5	1							
5: Fire	0	0	0.5	0.25	1						
6: 3 <sup>rd</sup> party liab	0.25	0	0	0	0	1					
7: credit	0	0	0	0	0	0.75	1				
8: legal exp.	0.5	0.25	0	0	0	0.5	0.75	1			
9: assistance	0	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	1		
10: misc.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
11: reinsurance	0	0	0.5	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	1

<sup>11</sup> Tale matrice risulta identica a quella utilizzata per la correlazione tra i diversi rami assicurativi nella valutazione del premium risk

Le deviazioni standard relative alle singole linee di business,  $\sigma_{lob} = sf \cdot f_{lob}$ , sono ottenute attraverso il prodotto di

$$\text{un fattore di scala } sf = \begin{cases} 1 & \text{se } PCO_{lob,gross} \geq 100m \\ \frac{10}{\sqrt{PCO_{lob,gross} \cdot 10^{-6}}} & \text{se } 100m > PCO_{lob,gross} \geq 20m \\ \frac{10}{\sqrt{20}} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e del fattore di volatilità specifico della linea di business.

LOB =	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_{lob}$	0.15	0.15	0.075	0.15	0.10	0.20	0.10	0.10	0.20	0.20	0.20

#### d) CAT RISK

Il requisito per far fronte agli eventi estremi non catturati dai due rischi precedenti si basa sulla seguente relazione:

$$NL_{CAT} = \max(0, f \cdot MS \cdot ML - X_2) + \min(f \cdot MS \cdot ML - X_2, X_1)$$

dove:

- ML rappresenta il “market loss” definito dal regolatore
- $MS = \frac{P_U}{P_M}$  rappresenta il “market share” pari al rapporto tra i premi lordi caratterizzati dal rischio catastrofale considerato e i premi lordi contabilizzati relativi ai rischi catastrofali
- f indica il limite di ritenzione del trattato riassicurativi
- $X_1$  e  $X_2$  indicano i limiti di un trattato CAT-XL

### 1.3 Il calcolo del Requisito di Capitale: l'approccio dell' IAA

Anche l'Insurer Solvency Assessment Working Party, creato dall'IAA, in supporto dello IAIS, allo scopo di compiere uno studio su un ipotetico sistema di solvency meglio correlato al rischio delle imprese, sta dirigendosi verso una struttura a tre pilastri ed ha delineato le basi di un possibile requisito minimo di capitale.

In particolare viene presentato un “Non-Life Case Study” in cui sono illustrate due strade per calcolare il requisito di capitale minimo derivante dall'underwriting risk: la prima è basata sull'utilizzo di un factor based approach in cui i parametri potrebbero essere forniti dal regolatore o

dall'assicuratore stesso, previa approvazione dell'autorità di vigilanza, e la seconda è basata su un modello di quantificazione del rischio assicurativo.

#### a) Il MODELLO DI RISCHIO

Il modello di rischio è basato su un algoritmo di simulazione e riprende alcune delle ipotesi classiche presentate dalla letteratura della teoria del rischio.

In particolare considerando l'approccio collettivo classico, per ogni linea di business il costo sinistri aggregato sarà pari a:

$$\tilde{X}_i = \sum_{k=1}^{\tilde{K}_i} \tilde{Z}_{i,k}$$

in cui:

- la variabile  $K_i$  numero di sinistri, è distribuita secondo un processo di Poisson misturato con media  $\lambda_i$  con  $\chi_i$  fattore di disturbo con distribuzione Gamma con media 1 e varianza  $c_i$
- la variabile  $Z_{i,k}$ , costo del singolo sinistro, è distribuita secondo una LogNormale con media  $\mu_i$  e standard deviation  $\sigma_i$

Il costo sinistri aggregato relativo all'intero business è poi ottenuto introducendo una struttura di dipendenza:

$$\tilde{X} = \sum_{i=1}^{nlob} \beta_i \tilde{X}_i$$

dove  $\beta_i$  è il p-simo percentile di una distribuzione con media 1 e varianza  $b_i$  e dove  $p$  è un numero casuale estratto da un uniforme con media 0 e varianza 1. Il parametro introduce quindi una struttura di dipendenza tra i sinistri prodotti dalle diverse linee di business: può essere interpretato come l'effetto dell'incertezza dovuta alla struttura economica che influisce sull'intero portafoglio.

E' possibile così ottenere i due momenti della distribuzione aggregata<sup>12</sup>:

$$E(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{nlob} \tilde{X}_i = \sum_{i=1}^{nlob} (\lambda_i \cdot \mu_i)$$

$$VAR(\tilde{X}) = \sum_{i=1}^{nlob} \sum_{j=1}^{nlob} Cov[\beta_i \tilde{X}_i, \beta_j \tilde{X}_j] = \begin{cases} (1+b_i) \left( \lambda_i^2 \sigma_i^2 + \mu_i^2 (\lambda_i^2 + c_i \lambda_i^2) \right) + (b_i \mu_i \lambda_i^2) & se \quad i=j \\ \lambda_i \mu_i \lambda_j \mu_j \rho_{ij} \sqrt{b_i b_j} & se \quad i \neq j \end{cases}$$

<sup>12</sup> La varianza di X può anche essere scritta nel modo seguente:

$$Var(\tilde{X}) = \lambda^2 E(Z^2)(1+b) + \lambda^2 E^2(Z)(b+c+bc)$$

si veda in proposito: Heckman & Meyers: "The calculation of aggregate loss distributions from claim severity and claim count distribution"

Ipotizzando che la distribuzione del costo aggregato sia una LogNormale è possibile individuarne i parametri con il metodo dei momenti e stimare il Var e il TailVar al livello di confidenza prefissato. Si tratta dunque di un modello basato sulle ipotesi classiche della teoria del rischio che prevede la presenza dei fattori di disturbo e di un ulteriore componente di variabilità dovuta alla correlazione tra i rami. L'introduzione di questi fattori provoca un incremento della variabilità assoluta e relativa del costo aggregato.

Il coefficiente di variazione della  $X$  infatti decrescerà all'aumentare del numero dei sinistri medio, ma non potrà essere inferiore all'asintoto orizzontale  $b_i + c_i + b_i c_i$ <sup>13</sup>.

Particolarmente interessante risulta il metodo di stima dei parametri  $b_i$  che prende spunto da diversi articoli presentati da Meyers<sup>14</sup> in cui sono analizzate modellistiche che includono dei moltiplicatori sia sul numero dei sinistri sia sul costo dei sinistri per cogliere le dipendenze.

Tale moltiplicatore induce una tipologia di dipendenza tra i sinistri relativi alle diverse linee di business: date due linee  $X_1$  e  $X_2$  un più elevato livello di  $\beta$  indica una maggiore dipendenza.

I sinistri sono dunque condizionatamente indipendenti, ma la correlazione viene imposta attraverso l'introduzione dei moltiplicatori, creando una struttura di dipendenze che dipende dal valore stimato dei parametri.

Meyers, Klinker e Lalonde mostrano come semplici analisi dell'andamento dei loss-ratio possa permettere una prima quantificazione del valore  $b_i + c_i + b_i c_i$ .

In particolare la stima viene compiuta esaminando i loss ratio degli ultimi 10 anni, determinando le deviazioni normalizzate tra il costo aggregato osservato per il ramo  $i$ , per la compagnia  $j$  e per l'anno  $k$  e il costo atteso ed infine compiendo una media pesata dei prodotti delle deviazioni tra due linee identiche appartenenti a diverse compagnie.

## b) La FACTOR-BASED FORMULA

La formula presentata dall'IAA si basa sulla definizione del modello sottostante presentato in precedenza e richiede la conoscenza dei sinistri attesi per linea di business e dei parametri, specificati in seguito nel dettaglio, definiti a priori dall'assicuratore o dal regolatore.

Usando i parametri stimati, la formula permette di calcolare i primi due momenti della distribuzione del costo sinistri aggregato e di stimare il TailVar, scelto fra le diverse misure di rischio, al livello di

---

<sup>13</sup> Risulta infatti: 
$$Var\left(\frac{\tilde{X}}{E(X)}\right) = \frac{E(Z^2)(1+b)}{E^2(Z)(1+b)} + (b + c + bc)$$

<sup>14</sup> Si veda in proposito: "Estimating Between Line Correlations Generated by Parameter Uncertainty", Meyers, CAS Spring forum, 1999 e "The Aggregation and Correlation of Insurance Exposure", Meyers, Klinker, Lalonde, CAS Forum 2003

confidenza prefissato del 99%, ipotizzando che la distribuzione del costo sinistri aggregato sia una Lognormale.

La formula prevede i seguenti passaggi:

- definizione dei seguenti parametri di input: costo medio  $\mu_i$  e coefficiente di variabilità  $CV_i$  del singolo sinistro, la varianza  $c_i$  del fattore di disturbo e la varianza  $b_i$  del parametro  $\beta_i$
- stima dei parametri della distribuzione lognormale delle diverse linee di business in presenza e in assenza di riassicurazione utilizzando l'algoritmo proposto da Klugman, Panjer e Wilmoth;
- stima del numero atteso di sinistri  $\lambda_i$  pari al rapporto tra il costo sinistri aggregato atteso e la media del costo del singolo sinistro  $\mu_i$  ;
- calcolo della media e della varianza del costo aggregato dei sinistri utilizzando le formule del modello definito in precedenza
- stima del  $TailVar_{99\%}$  ipotizzando che la distribuzione aggregata sia una Lognormale<sup>15</sup>.
- Calcolo del risk based capital per l'underwriting risk sottraendo al TailVar le perdite medie al netto della riassicurazione relative al business corrente e le perdite medie al netto della riassicurazione sulle riserve e aggiungendo una quota per far fronte ai sinistri catastrofici:

$$TailVar_{99\%} - ENL - NLS + CAT$$

## 1.4 Il sistema Risk-Based Capital (RBC) Statunitense

Il sistema denominato Risk-Based Capital (RBC) è stato introdotto negli Stati Uniti negli anni Novanta<sup>16</sup> dalla NAIC (National Association Insurer Commisioners), l'associazione che riunisce le autorità di vigilanza assicurative dei vari stati federali degli Stati Uniti. In precedenza i requisiti di solvibilità differivano da uno Stato all'altro e consistevano in taluni casi in un capitale non dipendente in alcun modo dalle caratteristiche dell'impresa (dimensione, investimenti...).

La nuova norma, destinata a riflettere maggiormente le dimensioni delle imprese e la loro esposizione al rischio, si è inserita nel progetto più vasto di razionalizzazione e di armonizzazione delle regole applicabili alle imprese di assicurazione degli Stati Uniti. Il principio dell'RBC è determinare un requisito patrimoniale per ciascuno dei principali rischi assunti dalle imprese e di

---


$$^{15} TVar_{\alpha} = \frac{E(X) \left( 1 - N \left( \frac{\ln(Var_{\alpha}) - \mu - \sigma^2}{\sigma} \right) \right)}{(1 - \alpha)}$$

<sup>16</sup> Questo sistema è entrato in vigore nel 1993 per il ramo vita e nel 1994 per i rami danni

combinare, in seguito, tali requisiti attraverso una formula che verrà descritta successivamente. La struttura del sistema americano è caratterizzata quindi sia da un requisito complessivo articolato e legato alla rischiosità dell'impresa sia da ampie possibilità di intervento per l'autorità di vigilanza anche per livelli di Total Adjusted Capital (TAC) compresi tra il 100% e il 200% del requisito di capitale.

Il sistema RBC per il ramo danni identifica due grandi categorie di rischi: i rischi degli attivi, cioè di perdite derivanti dal deprezzamento del valore degli attivi o dal default degli emittenti, e i rischi tecnici caratterizzati dalla possibilità di insufficienza delle riserve e dei premi. Viene previsto inoltre un requisito (R0) per gli impegni fuori bilancio e per le partecipazioni detenute in imprese di assicurazione del gruppo.

L'RBC totale è ottenuto con un'operazione, denominata talvolta "covariance adjustment", la cui

$$\text{formula è: } RBC = R0 + \sqrt{R1^2 + R2^2 + (0.5R3' + R3'')^2 + (0.5R3' + R4)^2 + R5^2}$$

dove:

- R0 è il requisito patrimoniale per il rischio di investimento in società del gruppo e per le passività potenziali;
- R1 è il requisito patrimoniale per il rischio di investimento relativo a titoli a reddito fisso e investimenti a breve termine. Tale requisito è ottenuto ponderando le obbligazioni e i titoli detenuti con fattori di moltiplicazione in funzione della qualità, classificata dalla NAIC con meccanismi simili a quelli delle società di rating. I fattori di ponderazione vengono ridotti in caso il numero di emittenti sia particolarmente elevato per tener conto della diversificazione del portafoglio;
- R2 è il requisito patrimoniale relativo al rischio di investimento in azioni e immobili. Anche in questo caso il requisito è ottenuto ponderando, in alcuni casi in modo forfetario, gli attivi detenuti e prevedendo aggiustamenti per tener conto della concentrazione del portafoglio.
- R3 è pari al requisito patrimoniale per il rischio di credito. Il requisito per il rischio di credito viene ottenuto distinguendo il rischio collegato a crediti verso i riassicuratori  $R3^I$ , dal rischio degli altri crediti  $R3^{II}$  ed applicando differenti fattori di ponderazione.
- R4 è pari al requisito patrimoniale per il rischio di riservazione
- R5 è il requisito patrimoniale per il rischio di tariffazione

Si ipotizza che le tutte le fonti di rischio sotto radice siano fra loro indipendenti, mentre la loro somma sia interamente correlata con il requisito patrimoniale R0. Una struttura di questo tipo, provoca, secondo le stime del Muller Working Party, una riduzione del requisito di circa un terzo rispetto all'ipotesi di piena indipendenza.



Può essere infine interessante soffermarsi più nel dettaglio sulle metodologie di calcolo utilizzate per la stima dei requisiti tecnici (R4 e R5).

Il requisito per il rischio di riserva misura la sensibilità delle riserve a fronte di eventuali scostamenti. Tale rischio viene valutato applicando alle riserve sinistri un fattore di ponderazione differenziato in funzione del ramo di attività. Tali fattori variano da una società all'altra in quanto dipendono dalla combinazione di coefficienti determinati dalla Naic e di correttori che riflettono le liquidazioni delle riserve delle società in oggetto.

I fattori stabiliti dalla NAIC sono determinati sulla base del peggior risultato del mercato negli ultimi 10 anni valutato in termini di tasso di run-off e sono rivisti qualora si renda necessario un aggiornamento. Tale indice è ottenuto dal rapporto tra l'incremento dei sinistri avvenuti tra due date di bilancio e l'ammontare della riserva sinistri iniziale. Tali rapporti sono stati raccolti separatamente per ogni impresa, per ogni anno e per ogni linea di business e dopo aver compiuto una media non ponderata dei valori relativi alle diverse compagnie, viene identificato il rapporto più elevato nel periodo per ogni linea di business.

Il fattore caratteristico della singola impresa è invece stimato comparando il fattore di sviluppo della singola compagnia con quello medio del mercato:

$$\frac{F_R}{\bar{F}_R} = \frac{(CIL - IIL)}{CIL} \bigg/ \bar{F}_R$$

dove:

- CIL indica il costo sinistri riportato alla data di bilancio con riferimento ai sinistri generati nei nove anni precedenti
- IIL indica il costo sinistri riportato ad inizio anno con riferimento ai sinistri generati nei nove anni precedenti
- $\bar{F}_R$  indica il fattore di sviluppo medio di mercato.

Infine il calcolo integra un fattore di sconto per tener conto del fatto che il grado di insufficienza delle riserve constatato a posteriori è compensato in parte dai proventi finanziari generati dalle stesse riserve. E' presente un "implicit interest margin" pari alla differenza tra il valore delle riserve con basi non scontate e con basi scontate, che funge da implicito "cuscinetto" per garantire la solvibilità.

Per ogni linea di business l'effettivo coefficiente di ponderazione  $CC_R$  viene così ottenuto utilizzando la seguente formula:

$$CC_R = \left[ \left( \left( \frac{F_R}{\bar{F}_R} LD + LD \right) / 2 \right) + 1 \cdot DF_R \right] - 1$$

dove:

- LD indica il fattore individuato dalla Naic
- $DF_R$  indica la riduzione per tener conto della redditività degli investimenti degli attivi

Tale coefficiente viene poi corretto per tener conto di determinate deduzioni, alcune delle quali specifiche di determinati rami.

Sono previste le seguenti correzioni:

- è prevista una deduzione del 20% per il ramo Rc professionale medici sulla quota di contratti sottoscritti con la forma “claims-made”, vale a dire polizze che coprono unicamente sinistri accaduti e denunciati entro la scadenza contrattuale, per considerare un indice di run-off osservato generalmente più contenuto per queste tipologie;
- viene introdotta una deduzione del 30% per i contratti “loss-sensitive” in assicurazione diretta e del 15% per i contratti in riassicurazione attiva che rispondono alle tipologie definite dalla Naic. Tali contratti consentono all’assicuratore di richiedere un’integrazione del premio in funzione della frequenza sinistri rilevata nel periodo di copertura assicurativa;
- nell’aggregazione dei risultati relativi alle diverse linee viene considerata una parziale dipendenza applicando alla somma dei requisiti, corretti con le due deduzioni descritte in precedenza, il seguente moltiplicatore:  $0.7 + 0.3 \cdot (LCF_R)$  dove  $LCF_R$  rappresenta un fattore di concentrazione pari al rapporto tra l’ammontare delle riserve nella maggiore linea di business e l’ammontare delle riserve totali;
- viene previsto infine un capitale aggiuntivo nel caso di una crescita superiore alla media osservata negli ultimi tre anni. Tale crescita è pari alla media aritmetica delle variazioni dei premi diretti sottoscritti negli ultimi tre anni. Tale tasso di crescita fa riferimento ai risultati del gruppo e induce una correzione se eccede il valore del 10%, ipotizzato come crescita base per effetto dell’inflazione e dell’espansione dell’economia. Individuato il tasso di crescita  $GR$  l’incremento di capitale sarà pari a:  $0.45 \cdot (GR - 0.1)^+$ .

Accanto al requisito di capitale accantonato per far fronte all’insufficienza delle riserve, che può provocare la non profittabilità dei contratti già sottoscritti, viene introdotto un ulteriore requisito, individuato con R5 nella formula generica, per contrastare il rischio che i premi relativi al business futuro, determinato fissando un orizzonte temporale di un anno, non siano sufficienti a coprire i sinistri corrispondenti.

Il principio di calcolo è molto simile al precedente: il requisito relativo ad ogni linea di business viene infatti determinato applicando il fattore di ponderazione  $CC_P$  ai premi emessi nell’esercizio contabile considerato.

$$CC_P = \max(LRC + ER - 1; 0)$$

dove

- ER rappresenta l'Expenses Ratio non differenziato per linea di business
- $LRC = \left[ 1 + \left( \frac{[F_p / \bar{F}_p + 1]}{2} \cdot LR \right) \right] \cdot DF_p$  indica il Loss Ratio opportunamente corretto

calcolato considerando sia il fattore LR indicato dalla Naic e basato sul peggior loss ratio medio osservato negli ultimi 10 anni, sia la correzione basata sulla media dei loss ratio degli ultimi 10 anni della compagnia, sia il fattore di riduzione  $DF_p$  che considera i proventi derivanti dall'investimento del premio tra l'incasso e la liquidazione del sinistro.

Anche per questo requisito sono previste le riduzioni del 20% e del 30% per tener conto rispettivamente dei contratti Rc professionale medici con formula "claims-made" e dei contratti "loss-sensitive".

Viene inoltre utilizzata un'analoga formula, per considerare le correlazioni, basata sul coefficiente di concentrazione  $LCF_p$ , dato dal rapporto tra i premi sottoscritti relativi alla maggiore linea di business e i premi totali sottoscritti, entrambi riferiti all'ultimi anno:  $0.7 + 0.3 \cdot (LCF_p)$ .

Infine viene introdotto un analogo capitale aggiuntivo basato sullo stesso tasso di crescita GR e sulla seguente formula:  $0.225 \cdot (GR - 0.1)^+$ .

**Figura 2: Fattori di calcolo (LD e DF) dei requisiti di capitale per il reserve risk e l'underwriting risk stimati dalla Naic.**

Lob	H/F	Private Passenger Auto Liability	CA	Workers Compensation	CMP	Medical Malpractice
LD	27,5%	25,4%	28,7%	27,3%	37,4%	56,5%
DF <sub>R</sub>	92,8%	92,1%	90,5%	87,2%	88%	80,8%
LR	91,7%	104,6%	101,3%	100,8%	91,7%	147,2%
DF <sub>p</sub>	94,2%	92,4%	90%	83,6%	88,4%	77,8%

## 1.5 L'approccio della Financial Service Authority (FSA)

A partire dal 2002, diverse indagini condotte dall'autorità di vigilanza del mercato inglese, mostrarono la necessità di rivedere i metodi di stima delle riserve tecniche e dei requisiti di capitale divenuti ormai poco rispondenti dell'effettiva rischiosità dell'impresa.

Essendo la fase del Solvency II ancora lontana da una conclusione, è stato delineato all'interno del Regno Unito un nuovo sistema per la determinazione del requisito di capitale basato sulla determinazione di due nuovi requisiti: l'Enhanced Capital Requirement (ECR) e l'Individual Capital Assessment (ICA).

L'obiettivo è giungere ad un sistema più trasparente, aderente ai rischi e che permetta un intervento tempestivo della vigilanza.

Il metodo di calcolo dell'ECR sarà relativamente semplice e utilizzerà informazioni già a disposizione delle compagnie, per non penalizzare eccessivamente le imprese inglesi che dovranno adattarsi a due importanti cambiamenti in materia di solvibilità.

La FSA ritiene inoltre che ECR e ICG andranno modificati e migliorati dopo la loro introduzione e che potranno assomigliare in alcuni aspetti al Solvency II.

La normativa relativa al Margine Minimo di Solvibilità stabilita nel Solvency I rimarrà immutata, in aggiunta sarà introdotto un nuovo requisito di capitale detto ECR, più sensibile alle caratteristiche di ogni impresa, con l'obiettivo di promuovere una maggiore "cultura del rischio" nel management. L'ECR dovrà essere necessariamente superiore al requisito risultante dal Solvency I e si determinerà tenendo conto del tipo di attività, della riassicurazione, delle riserve sinistri e dei premi per ogni ramo.

Il Capital Resources Requirement (CRR) richiesto all'impresa risulterà così pari al massimo tra l'ECR e il Minimum Capital Requirement (MCR) calcolato utilizzando la formula del Solvency I.

L'ECR viene invece calcolato sommando un requisito di capitale per l'asset risk(AC) ad un requisito di capitale per il rischio assicurativo (IC) e sottraendo le riserve di equilibrio (EP):  $ECR = AC + IC - EP$ . Le riserve di equilibrio vengono così aggiunte alle risorse di capitale per far fronte al requisito ECR, mentre sono dedotte dal capitale disponibile per il Margine Minimo di Solvibilità.

L'asset-related capital requirement (AC) individua il requisito di capitale che l'impresa dovrebbe detenere per far fronte al rischio di perdita in caso di insolvenza di una controparte o in caso di variazione sfavorevole del valore degli asset. Tale requisito viene ottenuto moltiplicando il valore degli attivi suddivisi per categoria per un fattore di rischio variabile in funzione della tipologia ed opportunamente definito dalla FSA.

L'insurance-related capital requirement (IC) indica invece il requisito necessario per fronteggiare sia le variazioni sfavorevoli nel valore delle passività considerando la volatilità delle riserve, sia l'eventuale inadeguatezza dei premi a coprire i futuri sinistri corrispondenti.

In questo caso vengono definite 24 classi di business caratterizzate da 8 differenti linee (Accident&Health, Motor, Aviation, Marine, Transport, Property, Liability, Miscellaneous&Pecuniary Loss) suddivise in base a tre differenti trattati riassicurativi (diretto/facoltativo, proporzionale e non proporzionale).

Come nel caso precedente, il requisito è ottenuto moltiplicando, per le diverse linee di business, l'ammontare dei premi sottoscritti, al netto della riassicurazione, per dei fattori opportunamente

determinati e l'ammontare delle riserve sinistri, comprensive delle stime per gli IBNR e gli IBNER, e delle riserve premi, al netto delle riserve di equilibrio e dell'ammortamento provvigionale entrambe considerate al netto di eventuali trattati riassicurativi, per altri fattori opportunamente determinati.

Particolare interesse assume il processo di stima e di determinazione dei fattori di rischio da applicare per il calcolo dei requisiti: questi ultimi infatti sono stati individuati in seguito ad un'analisi accurata<sup>17</sup>, effettuata allo scopo di calibrarli per differenti probabilità di insufficienza del requisito di capitale (dal 2,5% allo 0,2%) e per differenti orizzonti temporali (1 e 5).

La calibratura dei coefficienti è stata compiuta individuando le distribuzioni del surplus o del deficit per ogni fattore di rischio per ogni classe considerata. La combinazione delle distribuzioni per ogni impresa ha permesso di definire il requisito di capitale per le diverse probabilità di fallimento considerate. I fattori sono stati infine determinati tramite un processo di ottimizzazione che restituisse un ECR il più vicino possibile al requisito teorico calcolato in precedenza.

Può essere interessante osservare come la scelta della probabilità di rovina, l'orizzonte temporale e il numero di imprese considerate influisce in modo significativo sull'entità del fattore.

**Figura 3: Fattori da applicare ai premi al netto della riassicurazione per il calcolo dell'underwriting risk per diversi livelli di probabilità di rovina e per diversi orizzonti temporali**

<b>Lob</b>	p=0,5% & T=1	p=1% & T=1	p=0,5% & T=5	p=0,5% & T=5 Except Large Insurers
Property direct	10,20%	9%	19,60%	11,90%
Property Prop.	23,10%	19,10%	50%	26,90%
Property Non Prop.	53,60%	45,30%	98,80%	62,40%
Liability Direct	13,90%	12,40%	44,20%	16,30%
Liability Prop.	13,90%	12,40%	44,20%	16,30%
Liability Non Prop.	13,90%	12,40%	44,20%	16,30%

**Figura 4: Fattori da applicare alle riserve al netto della riassicurazione per il calcolo del reserve risk per diversi livelli di probabilità di rovina e per diversi orizzonti temporali**

<b>Lob</b>	p=0,5% & T=1	p=1% & T=1	p=0,5% & T=5	p=0,5% & T=5 Except Large Insurers
Property direct	9,70%	8%	14,20%	11,30%
Property Prop.	12,10%	10,50%	19,10%	14,10%
Property Non Prop.	12,10%	10,50%	19,10%	14,10%
Liability Direct	14,20%	12,10%	25,90%	16,50%
Liability Prop.	14,20%	12,10%	25,90%	16,50%
Liability Non Prop.	14,20%	12,10%	25,90%	16,50%

<sup>17</sup> Watson Wyatt LPP, "Calibration of the general insurance risk based capital model", FSA, 25 Luglio 2003

Accanto al risultato di analisi attuariali che ha commissionato, la Fsa ha valutato anche l'approccio utilizzato da alcune società di rating, i requisiti richiesti da altri sistemi di solvibilità e la taratura del requisito di capitale minimo per il settore bancario.

L'ECR sarà tarato con fattori di rischio (vedi figura 5) tali da assicurare la sopravvivenza dell'impresa per un anno con un livello di confidenza del 99,5% ed utilizzando fattori di rischio riferiti all'intero mercato, attribuirà così un peso significativo delle compagnie con quote di mercato più rilevanti.

**Figura 5: Fattori di rischio per l'underwriting risk e per il reserve risk per le 8 linee di business e le 3 tipologie di riassicurazione**

Lob	Premium Charge Factor			Technical Provision Charge Factor		
	Direct	Proportional Treaty	Non-Proportional Treaty	Direct	Proportional Treaty	Non-Proportional Treaty
Motor	10%	10%	10%	9%	12%	14%
Accident & Health	5%	12%	35%	7,50%	16%	16%
Property	10%	23%	53%	10%	12%	12%
Liability	14%	14%	14%	14%	14%	14%
Loss e Mis	25%	25%	39%	14%	14%	14%
Aviation	32%	33%	61%	14%	16%	16%
Marine	22%	22%	38%	14%	17%	17%
Transport	12%	12%	16%	14%	15%	15%

Accanto al calcolo del requisito ECR, ogni impresa dovrà definire un modello per la valutazione del livello interno di capitale. L'Fsa valuterà successivamente se il capitale è adeguato a soddisfare gli obiettivi definiti e potrà dare opportuni suggerimenti (Individual Capital Guidance) all'impresa.

Ad ogni impresa verrà richiesto di compiere una valutazione dell'ammontare e della qualità del capitale necessario adeguato in funzione della natura e della rischiosità del business.

L'Fsa sottolinea come tale pratica può consentire un importante strumento di risk management in quanto l'autorità di vigilanza non indica alcuna struttura di calcolo obbligatoria, fornisce solamente alcuni suggerimenti in termini di rischi e scenari da considerare.

Probabilmente non sarà richiesto alle imprese di riportare costantemente la propria valutazione del capitale, ma quando saranno sviluppati adeguati approcci e modelli interni di valutazione del rischio, i risultati faranno parte della complessiva valutazione della solvibilità dell'impresa da parte dell'autorità di vigilanza.

Lo scopo dell'introduzione dell'ICA è quindi:

- fissare un capitale più appropriato all'effettiva rischiosità e garantire un miglior controllo dei rischi;
- incrementare la responsabilità del management;
- prevedere incentivi per una migliore gestione dei rischi;

- assicurare una migliore protezione degli assicurati e una maggiore trasparenza del mercato attraverso una riduzione dei fallimenti finanziari.

Appare dunque fondamentale la necessità per l'impresa di dimostrare, attraverso opportuni modelli di valutazione, la propria capacità di fronteggiare gli impegni nei confronti degli assicurati anche in presenza di scenari avversi.

Il valore degli asset dovrà essere così valutato in conformità a quello che si realizzerà al momento delle liquidazione nei diversi scenari ipotizzati e le passività saranno valutate considerando il loro valore realistico e l'istante in cui saranno liquidate. Le riserve tecniche potranno così essere determinate su basi scontate e le riserve di equilibrio estinte<sup>18</sup>.

Nel compiere la propria valutazione ogni impresa dovrà identificare le tipologie di rischi cui è sottoposta, quantificare la qualità e l'ammontare di capitale appropriato per mitigare ogni tipologia, effettuare stress test per dimostrare la capacità del capitale proprio di assorbire le perdite attese nei diversi scenari considerati.

La stima dovrà essere fatta considerando opportune proiezioni e i futuri piani di business e competerà al senior management la scelta del metodo di aggregazione dei rischi considerati e del livello di confidenza ritenuto adeguato.

L'Fsa individua i fattori di rischio che un'impresa dovrebbe considerare nella valutazione delle diverse tipologie. In particolare nella valutazione del rischio assicurativo l'impresa deve:

- analizzare le potenziali perdite dovute a rischi catastrofali, considerando il ricorso alla riassicurazione ed eventuali insolvenze del riassicuratore;
- analizzare il rischio di run-off delle riserve;
- determinare l'effetto di loss ratio più elevati rispetto ai quelli stimati analizzando i valori medi e la volatilità;
- determinare l'effetto di ogni altra caratteristica del rischio assicurativo che può provocare una variazione sfavorevole nelle future perdite.

Viene inoltre rilevato che nella valutazione del rischio assicurativo dovranno essere valutati: l'adeguatezza del pricing, l'effetto di una crescita rapida o di una brusca diminuzione del volume del portafoglio, l'incertezza legata alla valutazione dei sinistri, il tempo di liquidazione dei sinistri e i sinistri latenti, la concentrazione dei rischi presenti in portafoglio in funzione di variabili geografiche e dei canali di vendita, il rischio di mis-selling, la tolleranza di eventuali variazioni delle spese sostenute.

Per quanto riguarda il reserve risk, dovranno essere valutati:

---

<sup>18</sup> Si veda PRU 1.2.14, "CP190", FSA

l'adeguatezza e l'incertezza delle riserve sinistri e delle riserve spese, l'adeguatezza delle riserva premi e della riserva per rischi in corso, la frequenza e l'ammontare dei sinistri, possibili risultanze per sinistri sottoposti a cause giudiziarie, l'abilità dell'impresa di far fronte ad eventi catastrofici, l'effetto della riassicurazione e di possibili insolvenze, l'effetto dell'inflazione, l'effetto di eventuali fattori esterni, ad esempio sociali ed economici, sulla frequenza e sul costo dei sinistri. Vengono infine identificati gli eventuali input che un buon modello interno dovrebbe utilizzare per compiere un'adeguata valutazione: ipotesi in termini di futuri tassi di rendimento suddivisi per tipologia, previsioni in termini di tassi di premio, di esposizioni al rischio, di volumi di premio, di spese e commissioni, di frequenza ed ammontare dei sinistri per i prossimi cinque anni per ogni linea di business, stime dell'effetto della riassicurazione valutando gli attuali contratti, i futuri programmi e la stima dell'eventuale probabilità di insolvenza, previsioni dell'effetto dell'inflazione e di ulteriori fattori esterni, ipotesi e stime sulla correlazione tra i rischi.

## **1.6 Lo Swiss Solvency Test**

Anche l'autorità di vigilanza svizzera, la Federal Office of Private Insurance (FOPI), ha definito nel corso del passato biennio un modello di misurazione del rischio. Il progetto iniziato nel corso del 2003, è stato sottoposto negli anni seguenti ad una serie di analisi allo scopo di identificare errori e problematiche analizzando posizioni e commenti dei principali operatori del settore.

Lo Swiss Solvency Test (SST) è uno strumento utilizzato dall'autorità di vigilanza svizzera per migliorare l'identificazione e la valutazione dei rischi cui è sottoposta un'impresa.

E' basato su un modello stocastico che include una serie di analisi di scenari e che identifica un requisito per il rischio di mercato, il rischio assicurativo e il rischio di credito.

Lo SST definisce un modello stocastico standard, che verrà descritto in dettaglio nel seguito, ed un insieme di scenari, che permettono di determinare il target capital.

Viene comunque lasciata all'impresa la possibilità di discostarsi dalla struttura standard, sia attraverso variazioni nei parametri sia attraverso una rivisitazione completa del modello standard.

Lo Swiss Solvency Test contiene inoltre la definizione rispettivamente del capitale disponibile, il "risk bearing capital" (RBC), e di uno strumento di misurazione del rischio, il "target capital" (tc).

Il RBC è il capitale economico, disponibile liberamente, che può essere utilizzato dall'assicuratore per garantire la sopravvivenza a fronte di tutte le variazioni sfavorevoli che possono verificarsi nell'orizzonte temporale di un anno. Viene definito al tempo  $t$  come la differenza tra le passività  $L_t$  che incorporano anche le riserve sinistri valutate con la "best estimate", utilizzando basi scontate, e



le attività  $A_t$  valutate a valore di mercato:  $RBC_t = A_t - L_t$ . Nella valutazione delle riserve è previsto un ulteriore risk margin che non concorre però alla formazione del valore di  $L_t$  utilizzato nella formula precedente.

Per far fronte alle possibili variazioni di Rbc, l'assicuratore dovrà calcolare due requisiti di capitale: un requisito minimo basato sulle voci di bilancio e che non riflette direttamente il rischio specifico dell'impresa e un target-capital che sia market-consistent e correlato all'effettiva rischiosità dell'impresa. Il target capital può essere inteso come l'ammontare necessario per essere sicuri, ad un livello di confidenza prescelto che le attività alla fine dell'anno successivo siano sufficienti a coprire le passività e viene definito da:

$$tc = ES_{\alpha} \left( \frac{RBC_{31/12}}{1+r} - rbc_{1/1} \right) + rm$$

dove  $r$  rappresenta il tasso free-risk e  $\alpha$  la probabilità di rovina prefissata, probabilmente pari al 1%.

Tale indicatore consiste dunque di due elementi:

- il risk margin (rm) definito in modo tale che un secondo assicurato sarebbe compensato per il rischio, o più precisamente per il costo del capitale dovuto dal detenere un capitale minimo, qualora rilevasse le attività e le passività dell'impresa
- e un capitale indicato con ES, in quanto utilizza l'Expected Shortfall, che rappresenta il RBC necessario oggi per far fronte ai rischi, qualora si verificasse il peggior scenario, prefissata la probabilità di rovina e con un orizzonte temporale di un anno.

Utilizzando la suddivisione dei rischi, definita in precedenza, il target capital verrà quindi definito sommando il requisito derivante dall'applicazione dell'ES alla distribuzione aggregata costruita valutando separatamente il market risk e l'insurance risk ed applicando l'effetto dell'analisi su scenari, al risk margin ed al requisito ottenuto valutando il credit risk attraverso l'approccio previsto dal Basilea II.

Il modello previsto dallo SST per la valutazione del rischio assicurativo per le assicurazioni contro i danni si basa su un'analisi per anno di generazione dei sinistri e ha lo scopo di quantificare la variazione annua di RBC per effetto della variabilità dei risultati tecnici.

In particolare sono considerate 12 linee di business e viene compiuta una distinzione tra la valutazione dei sinistri che si verificheranno nell'anno corrente (CY), ripartiti tra sinistri ad alta frequenza (SL) e grandi sinistri a bassa frequenza (LL) sulla base di una soglia prefissata<sup>19</sup>, e i sinistri che si sono già verificati negli anni precedenti e sono attualmente accantonati a riserva (PY).

La somma dei sinistri futuri viene così ripartita:  $S_{CY} = S_{CY}^{SL} + S_{CY}^{LL}$  in cui:

<sup>19</sup> Fissata pari a 1 Milione o 5 Milioni di Franchi Svizzeri, ogni assicuratore può scegliere tra i due valori.

- il costo sinistri aggregato relativo ai piccoli sinistri  $S_{CY}^{SL}$  per ogni linea di business può essere stimato sulla base delle modellistiche classiche. Ipotizzando che il numero dei sinistri sia modellizzato da una poisson misturata e il costo del singolo sinistro sia distribuito attraverso una classica distribuzione light-tail, come la gamma o la lognormale, è possibile ottenere la distribuzione del costo aggregato per ogni linea di business. La distribuzione aggregata verrà poi ottenuta utilizzando una matrice di correlazione, tra le diverse lob, opportunamente scelta. Per tener conto dei rischi sottostanti nella stima del costo aggregato della singola linea viene suggerito l'utilizzo del metodo dei momenti, strutturato considerando il rischio di processo e il rischio di parametro utilizzando la seguente formula:

$V^2(S_{CY}^{SL}) = V_P^2(S_{CY}^{SL}) + V_S^2(S_{CY}^{SL})$ , dove  $V$  indica il coefficiente di variazione del costo aggregato ripartito tra il rischio di parametro  $V_P$ , identico per tutti gli operatori e il cui valore di default è fornito dallo SST<sup>20</sup>, e il rischio stocastico stimato sulla base della seguente formula:  $V_S^2(S_{CY}^{SL}) = \frac{1}{\sqrt{E(N)}} \left( [V_S(Z_j^{SL})]^2 + 1 \right)$  dove i coefficienti di variazione

relativi ai singoli assicurati sono supposti identici per linea di business.

- I grandi sinistri (LL) comprendono sia le perdite provocate da un unico sinistro di grande entità (generalmente si osservano nei seguenti rami: health, transport, financial loss, property, general e motor liability), sia le perdite provocate da innumerevoli piccoli sinistri provocati da un unico evento. Entrambi vengono descritti utilizzando un processo di poisson composto in cui si utilizza una distribuzione di Pareto per il costo del singolo sinistro, i cui valori di default sono stimati facendo riferimento all'esperienza dei partecipanti del mercato.

Per quanto riguarda i sinistri già verificatisi ed accantonati a riserva, la distribuzione di probabilità delle variazioni di riserva per l'intero business viene ottenuta utilizzando una variabile Lognormale inversa e traslata con media zero e varianza pari alla somma delle varianze relative alle diverse linee e stimate utilizzando i dati storici relativi alla volatilità della riserva.

I tre risultati ottenuti e il modello utilizzato per quantificare il market risk vengono aggregati attraverso la convoluzione, sulla base del processo indicato nella figura (vedi figura 6).

La distribuzione aggregata finale viene, poi, rivista sulla base di un'analisi su scenari con lo scopo di considerare rischi non previsti dal modello stocastico e correggere eventuali anomalie.

In particolare dopo aver individuato i possibili scenari  $S_j$ , ognuno dei quali con probabilità  $p_j$  di verificarsi, e indicato rispettivamente con  $S_0$  e con  $F(X|S_0)$  lo scenario base e la rispettiva

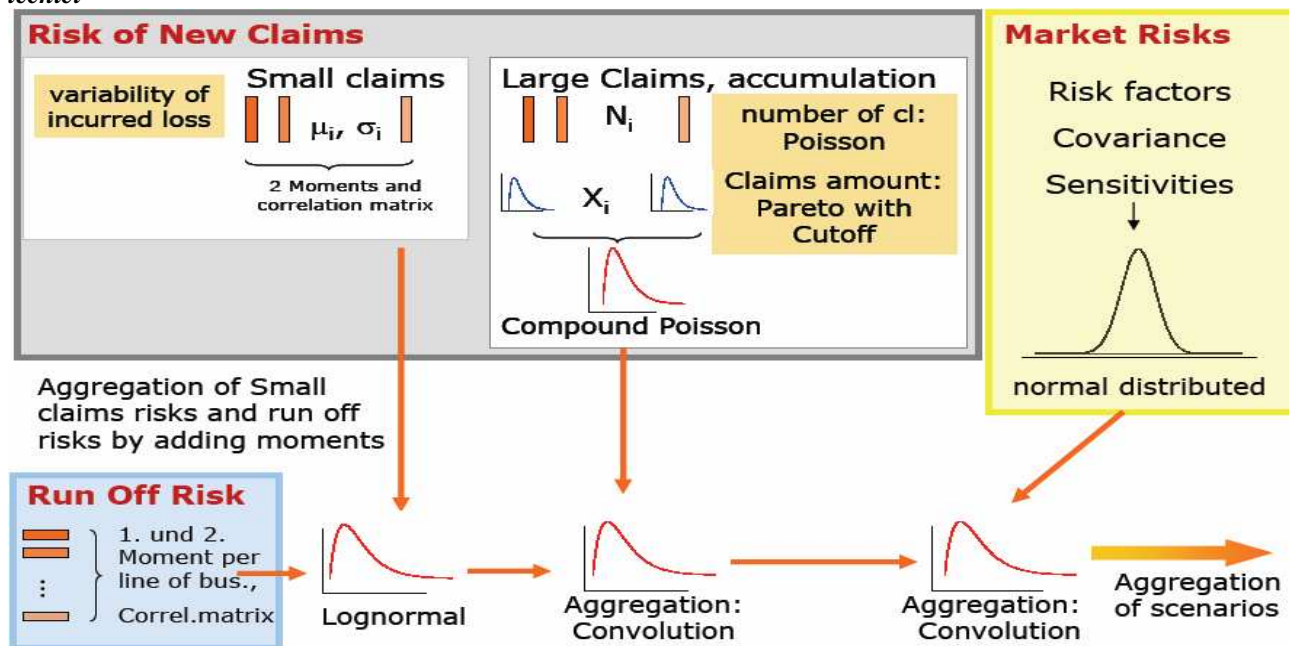
<sup>20</sup> Tale parametro generalmente assume un valore compreso tra il 3% e il 6%. Si veda in proposito: "On risk-adjusted solvency requirements in non-life insurance", M. Wutrich, Eth Zurich, Novembre 2005

distribuzione, per ogni scenario  $j$  sarà possibile quantificare la variazione  $c_j$  prodotta, tale che sussista la seguente relazione:  $F(x | S_j) = F(x - c_j | S_0)$ .

Ponderando le diverse distribuzioni, attraverso le probabilità di verificarsi dei diversi scenari, sarà

possibile ottenere la distribuzione complessiva:  $F(x) = \sum_{j=0}^n p_j F(x | S_j)$ .

**Figura 6: Calcolo della distribuzione aggregata della variazione di Rbc per effetto del market risk e dei risultati tecnici**



## Conclusioni

Diversi sistemi di solvibilità sono stati sviluppati e si stanno sviluppando nel panorama europeo e mondiale. Pur presentando metodi di valutazione e requisiti di capitale abbastanza diversi si possono individuare degli elementi comuni. Innanzitutto sia gli sviluppi del Solvency II sia le nuove metodologie presentate in alcuni stati europei hanno evidenziato la necessità di dirigersi verso una struttura di capitale più articolata e più correlata all'effettiva rischiosità dell'impresa sia attraverso una più adeguata valutazione dei rischi tecnici, sia attraverso la considerazione di nuove tipologie di rischi. In secondo luogo è stata evidenziata da molti la necessità di un sistema di valutazione che sia strettamente correlato ai principi contabili ed in particolare sia tarato in funzione di quanto verrà stabilito in termini di valutazione delle riserve tecniche.

Infine appare abbastanza evidente che ci si dirigerà verso l'utilizzo di nuove misure di rischio e verso livelli di probabilità di rovina decisamente più contenuti rispetto al passato.

Alcuni aspetti rimangono tuttavia ancora da definire. Non sembra esserci un parere univoco sulla metodologia da utilizzare: vengono, infatti, proposti modelli statici basati sull'utilizzo di fattori di rischio, caratterizzati da una minore complessità ma anche da un minore potere predittivo e da una scarsa capacità di cogliere le dimensioni e la diversificazione del portafoglio dell'impresa, e modelli probabilistici, che prevedono una maggiore flessibilità e un miglior potere predittivo, ma sono caratterizzati da una maggiore complessità di implementazione e necessitano di dati più particolareggiati. In ogni caso sembra che, per evitare l'eccessiva penalizzazione delle imprese più piccole causata dall'utilizzo di modelli molto complessi, ci si stia dirigendo verso dei sistemi di calcolo di tipo factor-based approach, resi sempre più completi e più correlati alle caratteristiche delle imprese ed eventualmente integrati con analisi su scenari. Generalmente (vedi Fsa, SST e Solvency II) viene comunque auspicata la possibilità di sviluppo e di utilizzo di modelli probabilistici interni, rappresentando questi ultimi non solo un importante strumento di valutazione del requisito di capitale, ma anche una possibilità di compiere più adeguate analisi in termini di rischio-rendimento.

Accanto alla scelta del modello, resta poi da definire la misura di rischio e il relativo livello di confidenza. Sulle proprietà e sulle caratteristiche delle misure di rischio, ci si soffermerà più nel dettaglio nei capitoli seguenti, occorre comunque sottolineare che nella maggior parte dei casi ci si sta indirizzando verso l'utilizzo del Var, sebbene in alcuni casi sono state proposte anche misure più estreme come il TailVar e l'Expected Shortfall.

Infine un ultimo aspetto su cui si sta ponendo particolare attenzione negli ultimi anni è rappresentato dall'analisi dell'impatto della correlazione tra diverse tipologie di rischio. In quest'ottica tutti i modelli sottolineano l'importanza dell'analisi delle dipendenze, in quanto l'ipotesi di indipendenza tra i rischi potrebbe produrre una sottostima del requisito di capitale.

Data la difficoltà di stima e la generale mancanza di dati a disposizione si propende per l'utilizzo di una matrice di correlazione lineare, in cui i coefficienti sono scelti in modo conservativo per considerare l'eventuale sottostima compiuta da questo indicatore in presenza di rischi asimmetrici.

L'IAA<sup>21</sup> sottolinea invece, la non correttezza nel descrivere il costo aggregato dei sinistri utilizzando una distribuzione normale multivariata e modellizzando le dipendenze attraverso il coefficiente di correlazione a causa dell'alta asimmetria della variabile costo sinistri e propone l'utilizzo delle copule.

---

<sup>21</sup> Si veda in proposito: "A Global framework for insurer solvency assessment", Appendice I, IAA, 2003

## 2 Misure di dipendenza: Correlazione lineare e Copule

### **Introduzione**

Lo studio di fenomeni multivariati e la valutazione congiunta dei rischi presuppongono una corretta stima delle interazioni esistenti tra le diverse componenti aleatorie: un comune strumento utilizzato nella pratica per la valutazione di tali relazioni è rappresentato dal coefficiente di correlazione lineare del Pearson.

In realtà in alcuni ambiti applicativi, tra cui quello attuariale, la natura intrinseca dei fenomeni in esame, ad esempio l'asimmetria della distribuzione dei sinistri e la crescente dipendenza tra i rischi sulle code<sup>22</sup>, rende spesso fuorviante o addirittura scorretto l'utilizzo del coefficiente di correlazione lineare.

Occorre dunque verificare sotto quali ipotesi tale coefficiente rappresenta una descrizione soddisfacente della realtà ed eventualmente far riferimento a strumenti alternativi per la misurazione della dipendenza.

Nel seguito verranno dunque evidenziati i principali limiti del coefficiente di correlazione e si analizzerà nel dettaglio l'alternativa rappresentata dalle funzioni copula.

Tali funzioni, che rappresentano un importante strumento, consentendo di creare una corrispondenza diretta tra la funzione di ripartizione di una distribuzione multivariata e le funzioni di ripartizione delle marginali univariate corrispondenti, sono state descritte negli anni Quaranta<sup>23</sup> e introdotte con questo nome da Sklar nel 1959<sup>24</sup>, ma sono state approfondite solo negli ultimi decenni, sfruttandole per descrivere le dipendenze non parametriche sussistenti tra coppie di variabili aleatorie.

### **2.1 Misure di associazione: correlazione, concordanza e dipendenza di coda**

Nel seguito ci si soffermerà su tre differenti misure di dipendenza: il coefficiente di correlazione lineare, la rank correlation, e la dipendenza di coda. Tutte queste misure forniscono una valutazione della relazione presente tra una coppia di variabili, sebbene hanno proprietà molto differenti.

---

<sup>22</sup> Si veda in proposito: grafico a dispersione dei costi dei sinistri di due linee assicurative, "A Global Framework for Insurer Solvency Assessment", pag.174, International Actuarial Association, Giugno 2004

<sup>23</sup> Vedi Hoeffding (1940), "Masztabivariate korrelationstheorie", Math. Univ. Berlin

<sup>24</sup> Vedi Sklar (1959), "Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges", Inst. Stat. Paris

La correlazione lineare rappresenta la misura canonica utilizzata nel mondo delle distribuzioni normali o più in generale delle distribuzioni sferiche<sup>25</sup> o ellittiche<sup>26</sup>, ma al di fuori di tali contesti essa può risultare errata e portare a considerazioni fuorvianti.

Infatti il coefficiente di correlazione lineare, utilizzato generalmente per la sua facilità di calcolo, ha numerosi limiti se analizzato escludendo le distribuzioni ellittiche. Vengono solitamente evidenziate tre importanti limitazioni di tale coefficiente:

- Le varianze delle variabili aleatorie devono essere finite altrimenti la correlazione non può essere definita. Questo causa diversi problemi quando sono considerate distribuzioni “heavy-tailed”
- Un coefficiente  $\rho$  pari a zero implica l’indipendenza solo nel caso particolare di distribuzioni normali<sup>27</sup>.
- La correlazione non è invariante sotto trasformazioni non lineari strettamente crescenti<sup>28</sup>

Ma i due aspetti che assumono particolare rilevanza dal punto di vista applicativo risultano i seguenti:

- date le distribuzioni marginali e la matrice di correlazione lineare non è sempre possibile ottenere un’univoca distribuzione multivariata<sup>29</sup>. In generale è possibile determinare un’univoca distribuzione se restringiamo la nostra attenzione a distribuzioni normali ellittiche.
- date le distribuzioni marginali non è sempre possibile costruire una distribuzione per qualsiasi valore compreso nell’intervallo chiuso  $[-1,1]$  del coefficiente di correlazione.

<sup>25</sup> Le distribuzioni sferiche rappresentano un’estensione della distribuzione normale standard multivariata e forniscono una famiglia di distribuzioni simmetriche di vettori incorrelati di media zero. Fanno parte di questa classe, la distribuzione normale multivariata ma anche la distribuzione multivariata standard e la distribuzione logistica standard. Un vettore  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  ha una distribuzione sferica se per ogni  $Z$  è ortogonale, cioè se è tale da soddisfare  $Z^t Z = Z Z^t = I_n$ ,  $ZX=X$ .

Per ulteriori proprietà delle distribuzioni sferiche vedi “Quantitative Risk Management”, McNeil, Frey, Embrechts.

<sup>26</sup> Un vettore  $X$  ha una distribuzione ellittica:  $X \sim E_d(\mu, \Sigma, \psi)$  se  $X = \mu + AY$ , con  $A$  e  $\mu$  matrice e vettori di costanti e  $Y$  appartiene ad una distribuzione sferica. Tali distribuzioni hanno le due importanti proprietà che le combinazioni lineari di variabili ellittiche hanno distribuzione ellittica e che le marginali sono distribuzioni ellittiche con identico generatore. Dunque la conoscenza del tipo di distribuzione marginale, della media, e della matrice di correlazione lineare permette la determinazione univoca della distribuzione multivariata. Per maggiori dettagli vedi “Quantitative Risk Management”, McNeil, Frey, Embrechts.

<sup>27</sup> Ad esempio  $X_1 \sim N(0,1)$  e  $X_2 = (X_1)^2$  pur strettamente dipendenti, hanno un coefficiente di correlazione lineare pari a zero.

<sup>28</sup> Considerando la distribuzione normale bivariata con coefficiente  $\rho$  e la trasformazione  $T(x) = \Phi(X)$  con  $\Phi$  funzione di densità della normale standard, è possibile dimostrare che  $\rho(T(x), T(y))$  è diverso da  $\rho(X, Y)$ . A riguardo vedi “Correlation and dependence in risk management”, Embrechts, McNeil, Straumann.

<sup>29</sup> Come mostrato da Embrecht, McNeil e Straumann è abbastanza semplice costruire esempi a supporto di tale affermazione: considerando due identiche marginali e introducendo diverse strutture di dipendenza basate sull’utilizzo di diverse funzioni copula è possibile ottenere differenti distribuzioni multivariate con identico coefficiente di correlazione lineare. Vedi ad esempio Figura 1 in “Correlation and dependence in risk management”, Embrechts, McNeil, Straumann.

Anche in questo caso è possibile determinare una distribuzione multivariata per qualsiasi valore di  $\rho$  solo nel caso di distribuzioni ellittiche.

Un teorema, dimostrato prima da Hoeffding e poi da Frechet, fornisce le indicazioni per la determinazione numerica dei valori estremi dell'intervallo nel caso generale: dato il vettore  $(X_1, X_2)$  con distribuzioni marginali  $F_1$  e  $F_2$ , con varianze finite e una struttura di dipendenza incognita, allora:

- 1) L'insieme delle possibili correlazioni è un intervallo chiuso  $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$  e per le correlazioni estreme vale la relazione  $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$ .
- 2) Il valore estremo  $\rho_{\min} = \rho$  è ottenuto se e solo se  $X_1$  e  $X_2$  sono contro-monotoniche, il valore estremo  $\rho_{\max} = \rho$  è ottenuto se e solo se sono  $X_1$  e  $X_2$  comonotoniche<sup>30</sup>.
- 3)  $\rho_{\min}$  e  $\rho_{\max}$  assumono i valori  $-1$  e  $1$  se rispettivamente  $X_1$  e  $-X_2$  sono dello stesso tipo e  $X_1$  e  $X_2$  sono dello stesso tipo<sup>31</sup>

Sorge così la necessità di definire misure di dipendenza alternative al coefficiente di correlazione lineare, che abbiano una valenza più generale e soddisfino alcune importanti proprietà. Si fa così riferimento alle misure di "rank correlation" che, a differenza di  $\rho$ , dipendono esclusivamente dalla copula della distribuzione bivariata e non dalle marginali. Lo stimatore empirico può essere così calcolato analizzando l'ordinamento dei dati e tale misura rappresenta inoltre, come vedremo in seguito nel dettaglio, un importante strumento per calibrare le copule sui dati empirici.

Esistono principalmente<sup>32</sup> due misure di correlazione di questo tipo: il tau di Kendall e il rho di Spearman.

Il tau di Kendall può essere interpretato come una misura di concordanza<sup>33</sup> tra coppie di vettori casuali e, dati  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  vettori aleatori identicamente distribuiti con funzione di ripartizione  $F$ , viene definito nel modo seguente:

$$\tau_K(X, Y) = P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0)$$

<sup>30</sup> Per i concetti di co-monotonicità e contro-monotonicità si fa riferimento a quanto proposto da Scmeidler e Yaari: due rischi sono detti co-monotonici o contro-monotonici se la loro funzione di ripartizione congiunta  $F(x_1, x_2)$  è rispettivamente pari a  $\min(F_1(x_1), F_2(x_2))$  e  $\max(F_1(x_1) + F_2(x_2) - 1, 0)$ .

Vale inoltre il seguente teorema: due rischi sono co-monotonici (contro-monotonici) se e solo se esiste una variabile aleatoria  $Y$  e due funzioni  $T_1$  e  $T_2$  non decrescenti (nel caso contro-monotonico la prima non decrescente, la seconda crescente) tali che  $(X_1, X_2) = (T_1(Y), T_2(Y))$ .

<sup>31</sup> Due variabili aleatorie  $X_1$  e  $X_2$  sono dello stesso tipo se esistono due numeri reali  $a$  e  $b$ , con  $a$  strettamente positivo, tali che  $X_2 = aX_1 + b$

<sup>32</sup> Accanto al tau di Kendall e al rho di Spearman esistono altre misure di concordanza. In particolare si possono citare l'indice di cograduazione semplice o di associazione  $g$  introdotto da Gini e l'indice di correlazione mediana  $\beta$  proposto da Blomqvist.

<sup>33</sup> Due punti  $(x_1, x_2)$  e  $(y_1, y_2)$  sono concordanti se  $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) > 0$ , viceversa sono discordanti se il medesimo prodotto è minore di zero. Intuitivamente quindi date due variabili aleatorie  $(X_1, X_2)$ , se  $X_2$  tende a crescere all'aumentare di  $X_1$  allora ci si attende che la probabilità di concordanza sia superiore a quella di discordanza. Viceversa se  $X_2$  decresce all'aumentare di  $X_1$  ci si attende l'opposto.

E' possibile ottenere una semplice stima del  $\tau$  estraendo un campione casuale di  $n$  realizzazioni da una variabile aleatoria  $(X,Y)$ :

$$\tau_K = \frac{c-d}{c+d} = \binom{n}{2}^{-1} (c-d) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{i < j} \text{sign}((x_i - y_i)(x_j - y_j))$$

dove  $c$  indica il numero delle coppie concordanti,  $d$  il numero delle coppie discordanti e  $\binom{n}{2}$  il numero delle coppie totali.

Il rho di Spearman è una misura basata sulla concordanza e discordanza di una popolazione. Siano  $(X_1, Y_1)$ ,  $(X_2, Y_2)$  e  $(X_3, Y_3)$  tre vettori aleatori indipendenti aventi un'unica funzione di ripartizione congiunta  $F$  e con marginali  $F_1$  e  $F_2$ , può essere definito nel modo seguente:

$$\rho_s(X, Y) = 3P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)$$

Anche in questo caso è possibile compiere una stima di tale indicatore estraendo un campione casuale di  $n$  realizzazioni:

$$\rho_s(X, Y) = \frac{12}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n \left( \text{rank}(x_i) - \frac{n+1}{2} \right) \left( \text{rank}(y_i) - \frac{n+1}{2} \right).$$

Entrambe queste misure di concordanza, che saranno riprese nel seguito più nel dettaglio in quanto strettamente legate con il concetto di copula, soddisfano oltre alle proprietà di normalizzazione e di simmetria anche ulteriori proprietà estendendone l'applicabilità anche a contesti non ellittici.

In particolare può essere interessante rilevare sia che il tau di Kendall e il rho di Spearman assumono valore pari a  $-1$  e  $1$  quando le variabili  $X$  e  $Y$  sono rispettivamente co-monotone e contro-monotone sia che i due indicatori si azzerano in caso di indipendenza tra  $X$  e  $Y$  ed è valida anche la relazione inversa.

Una delle tematiche più discusse, soprattutto per l'importante valenza pratica, è rappresentata dal concetto di dipendenza di coda (tail dependence).

E', infatti, di fondamentale importanza poter quantificare la probabilità di eventi estremi congiunti, soprattutto in contesti come quello finanziario o attuariale dove tali eventi possono provocare gravi perdite o ingenti guadagni. La conoscenza di queste possibilità permette così una migliore gestione del rischio attraverso una valutazione più adeguata delle dipendenze superando l'ipotesi irrealistica che la dipendenza tra eventi estremi tende asintoticamente ad annullarsi: per quanto la correlazione sia grande ma strettamente minore di uno, gli eventi congiunti estremi sono, di fatto, indipendenti (Teorema di indipendenza asintotica).



Facendo riferimento al caso bivariato, date due variabili  $X_1$  e  $X_2$  è possibile definire il coefficiente di dipendenza sulla coda superiore (Upper tail dependance)  $\lambda_U$  e il coefficiente di dipendenza sulla coda inferiore (Lower tail dependance)  $\lambda_L$  nel modo seguente:

$$\lim_{a \rightarrow 1^-} P[X_2 > F_2^{-1}(a) | X_1 > F_1^{-1}(a)] = \lambda_U \quad \text{e} \quad \lim_{a \rightarrow 0^+} P[X_2 < F_2^{-1}(a) | X_1 < F_1^{-1}(a)] = \lambda_L$$

Nel caso i limiti esistano, valori di  $\lambda_U$  e di  $\lambda_L$  compresi tra  $(0,1]$  indicano dipendenza asintotica rispettivamente sulla coda superiore e inferiore. Nel caso i due indicatori assumano valori pari a zero, si parla, invece, di indipendenza asintotica sulla coda superiore e inferiore.

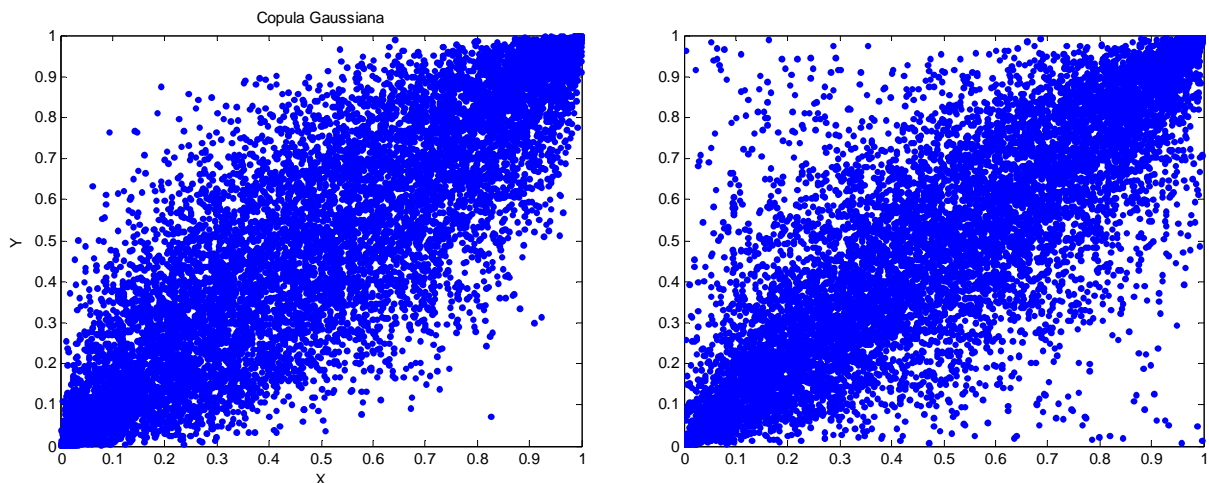
Anche il concetto di dipendenza di coda verrà riproposto nel dettaglio in seguito.

## 2.2 Le Copule: aspetti generali

Come sottolineato in precedenza, le funzioni Copula permettono di creare una corrispondenza biunivoca tra le funzioni di ripartizione delle marginali e la distribuzione multivariata. Tale proprietà permette di superare il principale limite del coefficiente di Pearson, rappresentato dall'impossibilità di definire univocamente la multivariata conoscendo le marginali e il coefficiente di correlazione lineare.

Attraverso un semplice esempio basato sull'utilizzo delle Copule è, infatti, possibile ottenere due differenti distribuzioni multivariate utilizzando identiche marginali ed uno stesso coefficiente di correlazione lineare.

**Figura 7: 10000 valori casuali estratti ipotizzando  $X$  e  $Y \sim U(0,1)$ , con coefficiente di correlazione lineare pari a 0.85 e differenti strutture di dipendenza (rispettivamente Copula Gaussiana e Copula  $t$  con tre gradi di libertà).**



Il concetto di copula è stato inizialmente introdotto in ambito matematico e si può definire nel modo seguente: una n-copula è una funzione definita da  $[0,1]^n = I^n$  in  $[0,1] = I$  che gode delle seguenti proprietà:

- per ogni  $u$  appartenente ad  $I^n$  vale la relazione  $C(u)=0$  se almeno un elemento di  $u$  è uguale a zero
- $C(1, \dots, 1, u_k, 1, \dots, 1) = u_k$
- Per qualsiasi  $u$  e  $v$  appartenente ad  $I^n$  con  $v \geq u$  vale che  $V_C(u, v) \geq 0$

La copula è generalmente definita anche come una subcopula con dominio  $I^n$ : la subcopula è una funzione  $C'$  con le seguenti proprietà:

- $E'$  è definita in  $S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n$  in cui  $S_i$  sono sottoinsiemi di  $I$
- $C'$  è limitata<sup>34</sup> e non crescente<sup>35</sup>
- $C'$  ha marginali univariate  $C_1, C_2, \dots, C_n$  tali per cui per ogni  $u$  appartenente al dominio  $C'(u_k) = u_k$

Sicuramente uno degli aspetti più interessanti dal punto di vista applicativo è rappresentato dal teorema di Sklar che crea l'importante legame tra le marginali e la multivariata.

Sia  $F$  una funzione di ripartizione congiunta di dimensione  $n$ , avente come marginali  $F_1, F_2, \dots, F_n$  allora esiste una copula  $C$  tale per cui ogni  $x$  appartenente a  $R_n$  vale che  $F(x) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ .

Se le marginali sono tutte continue allora  $C$  è unica, altrimenti è determinata in modo univoco sul condominio delle marginali.

Il teorema di Sklar mostra dunque come per distribuzioni multivariate continue si possa separare la struttura di dipendenza dai margini univariati e come questa struttura possa essere rappresentata dalla copula.

La formulazione del teorema può essere facilmente invertita esprimendo la copula in funzione della funzione di ripartizione congiunta e delle marginali:  $C(u) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$ .

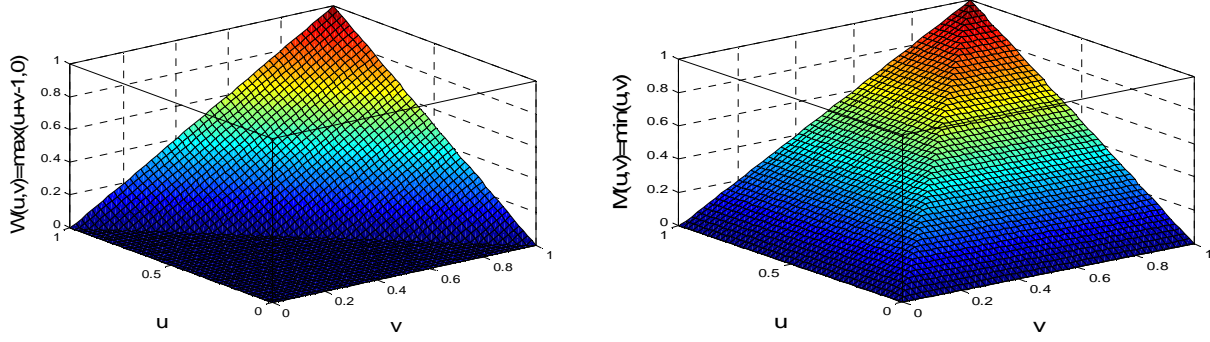
Una proprietà fondamentale delle subcopule riguarda la disuguaglianza nota come Fréchet-Hoeffding bounds: sia  $C'$  una subcopula allora per ogni  $u$  e  $v$  appartenenti al dominio di  $C'$  vale  $\min(u, v) \geq C' \geq \max(u+v-1)$ .

E' stato successivamente dimostrato<sup>36</sup> che i due estremi sono delle copule e che ogni copula  $C$  è compresa tra le due copule  $W(u, v)$  e  $M(u, v)$  definite rispettivamente limite inferiore e superiore di Fréchet.

<sup>34</sup> Una funzione  $H$  definita in  $S_1 \times S_2$  è limitata se  $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, x)$

<sup>35</sup> Una funzione  $H$  è non decrescente se  $V_H(B) \geq 0$  per tutti i rettangoli  $B$  i cui vertici giacciono nel dominio di  $H$ , dove  $V_H(B)$  rappresenta l' $H$  volume di  $B$  ed è la differenza di second'ordine di  $H$  su  $B$ . Ad esempio per una funzione bidimensionale  $H$ , dato il rettangolo  $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$  i cui vertici giacciono nel dominio di  $H$ , sarà pari a:  
 $V_H(B) = \Delta(x_1, x_2) \Delta(y_1, y_2) H(x, y) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$

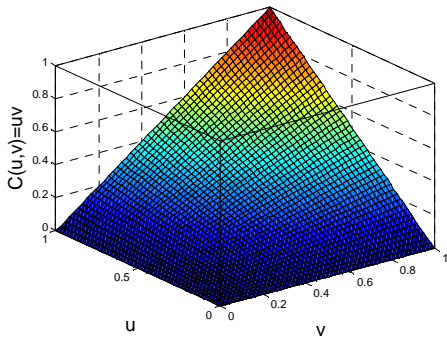
Figura 8: Limite superiore ed inferiore di Fréchet



L'introduzione delle copule permette di ottenere, in funzione della copula stessa, le misure di dipendenza e concordanza descritte nel paragrafo precedente. Si possono così riscrivere i seguenti indicatori:

- Tau di Kendall:  $\tau_K = 4E[C(u,v)] - 1 = 4 \iint_{I^2} C(u,v) \partial C(u,v) - 1$ <sup>37</sup>
- Rho di Spearman  $\rho_s = 12E[C(u,v)] - 3 = 12 \iint_{I^2} C(u,v) \partial C(u,v) - 3$ <sup>38</sup>
- L'upper tail dependance:  $\lim_{a \rightarrow 1^-} \frac{C(a,a)}{1-a} = \lambda_U$
- Lower tail dependance:  $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{C(a,a)}{1-a} = \lambda_L$

Figura 9: Copula Prodotto  $\Pi(u,v)=uv$



<sup>36</sup> Si veda in proposito: Wang, "Aggregated and Correlated risk portfolios: Models and Algorithms", PCAS,LXV,848-939

<sup>37</sup> E' possibile calcolare il Tau per ogni tipologia di copula. Ad esempio è possibile ottenere il valore del Tau pari rispettivamente a -1 e 1 per i limiti di Fréchet. Analogamente considerando la copula prodotto si ottiene:

$$\tau_K = 4 \iint_{I^2} uv - 1 = 4 \int v \frac{u^2}{2} \partial v - 1 = 4 \left( \frac{1}{4} \right) - 1 = 0$$

<sup>38</sup> Si ottengono i valori estremi (-1,1) in corrispondenza dei limiti inferiore e superiore di Fréchet. Nel caso della copula prodotto si ottiene:  $\rho_s = 12 \iint_{I^2} uv - 3 = 12 \int v \frac{u^2}{2} \partial v - 3 = 12 \left( \frac{1}{4} \right) - 3 = 0$

E' possibile infine introdurre due particolari tipologie di Copule generalmente utilizzate:

- la funzione  $\Pi(u,v)=uv$  è definita copula prodotto (vedi figura 9). Un aspetto significativo è rappresentato dal fatto che date due variabili aleatorie  $X_1, X_2$ , esse sono indipendenti se e solo se la struttura di dipendenza coincide con la Copula prodotto.
- la copula di sopravvivenza che permette di esplicitare la funzione di sopravvivenza tramite le marginali ed è definita nel modo seguente:  $\hat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(u - 1, v - 1)$

## 2.3 Le Copule: metodi di costruzione

La conoscenza della Copula permette di ottenere svariate distribuzioni multivariate ipotizzando diverse marginali. Nella pratica sono state individuate differenti tipologie di copule che saranno analizzate nel dettaglio nel capitolo successivo. Può essere interessante esaminare i diversi metodi di costruzione che permettono di giungere alla definizione di numerose funzioni Copula.

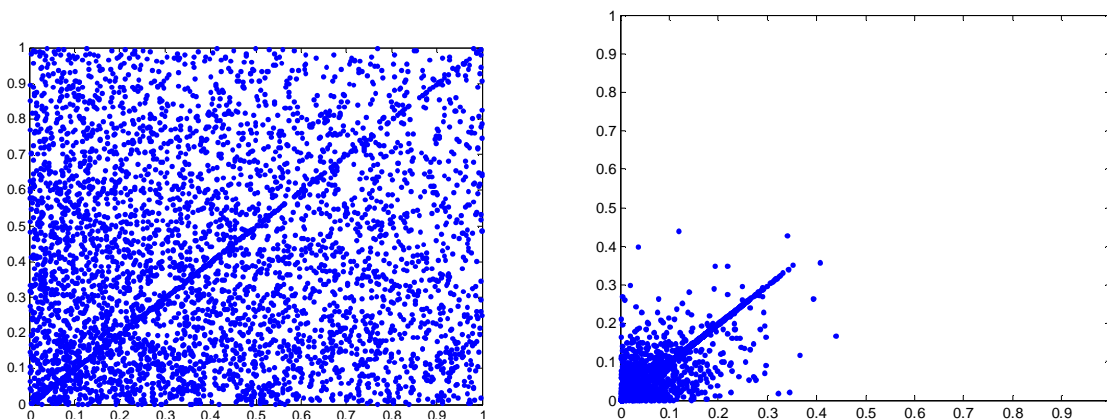
Un primo metodo, denominato metodo di inversione, permette di determinare la Copula attraverso l'inversione dell'espressione della funzione di ripartizione congiunta:

$$C(u, v) = F(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)).$$

Tale metodo, attraverso l'ipotesi che le marginali siano distribuite secondo una esponenziale permette di ottenere la famiglia di copule di Marshall-Olkin (vedi figura 10):

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \min(u^{1-\alpha} v^{1-\beta})^{39}.$$

**Figura 10:** 10000 coppie x,y simulate attraverso la Copula di Marshall-Olkin per due differenti valori del tau di Kendall (0.05 e 0.9)



<sup>39</sup> Per generare coppie aleatorie (x,y) dalla distribuzione bivariata esponenziale di Marshall-Olkin di parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{1,2}$  esiste un algoritmo proposto da Devroye che prevede i seguenti passaggi: generazione di tre elementi indipendenti r,s,t da una uniforme, imposizione di  $x = \min(\frac{-\ln(r)}{\lambda_1}, \frac{-\ln(t)}{\lambda_{1,2}})$  e  $y = \min(\frac{-\ln(s)}{\lambda_2}, \frac{-\ln(t)}{\lambda_{1,2}})$

Vedi Nelsen (2006) pag.58

Il metodo di inversione permette di ottenere, utilizzando la distribuzione uniforme circolare, anche la seguente famiglia di copule:

$$C(u, v) = \begin{cases} M(u, v) & |u - v| > 1/2 \\ W(u, v) & |u - v - 1| > 1/2 \\ \frac{u + v}{2} - \frac{1}{4} & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Una seconda famiglia di metodi, definiti geometrici, utilizza le proprietà matematiche che caratterizzano le copule anziché considerare il legame che le lega alle marginali. I metodi geometrici sfruttano le seguenti proprietà:

- somma convessa. La somma, sfruttando la proprietà che ogni combinazione lineare convessa di copule è una copula, permette di ottenere la copula  $C$  come somma convessa della famiglia  $C_\theta$  rispetto alla mixing distribution  $\Lambda$ :  $C(u, v) = \int_R C_\theta(u, v) d\Lambda_\theta$ <sup>40</sup>
- copule con sezioni verticali o orizzontali. Si possono definire famiglie di copule imponendo specifiche sezioni.

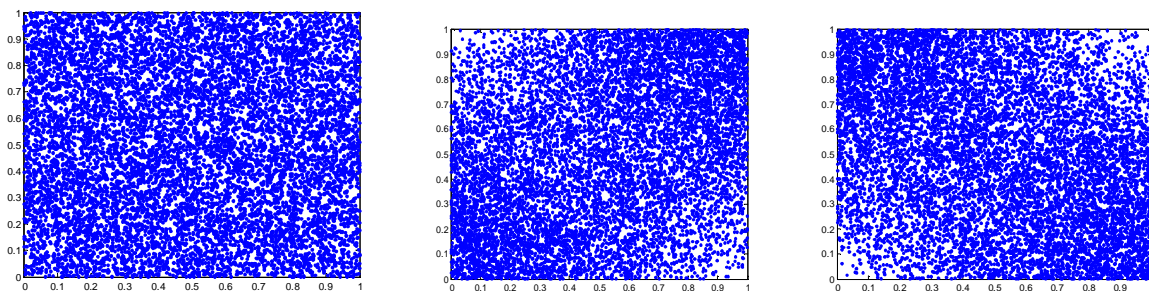
In particolare è possibile ottenerle tramite sezioni lineari  $C(u, v) = a(v)u + b(v)$ ,

tramite sezioni quadratiche<sup>41</sup>  $C(u, v) = a(v)u^2 + b(v)u + c(v) = uv + \psi(v)u(1 - u)$ ,

tramite sezione cubica  $C(u, v) = uv + u(1 - u)[a(v)(1 - u) + b(v)u]$ ,

ed infine tramite sezioni diagonali  $C(u, v) = \min(u, v, (1/2)[\delta(u)\delta(v)])$  con  $\delta$  sezione diagonale scelta.

**Figura 11: 10.000 coppie ottenuto simulando la Copula FGM con parametro  $\theta$  rispettivamente pari a 0, a 1 e a -1 (Tau pari a 0 a 2/9 e a -2/9)**



<sup>40</sup> Esiste una famiglia di copule ottenuta tramite somma convessa dei casi limite delle copule con pesi  $a, b$ . Tale famiglia, nota come famiglia di Fréchet, ha come funzionale:  $C(u, v) = aM(u, v) + (1 - a - b)\Pi(u, v) + bW(u, v)$  con  $a, b$  compresi tra 0 e 1

<sup>41</sup> Per opportune funzioni  $a, b, c$  e imponendo l'ulteriore condizione che la copula sia simmetrica, è possibile ottenere la famiglia di Farlie-Gumbel-Morgenstein:  $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1 - u)(1 - v)$  con  $\theta$  compreso tra -1 e 1. Una coppia  $(u, v)$  appartenente a tale famiglia può essere generata attraverso l'algoritmo proposto da Johnson (vedi Wang, "Aggregation of correlated risk portfolios", pag 932): generando due realizzazioni indipendenti  $u$  e  $t$  appartenenti alla uniforme, ponendo  $a = \theta(2u - 1) - 1$  e  $b = \sqrt{a^2 + 4(a + 1)t}$  e  $v = 2t / (b - a)$

Un'ultima possibilità di costruzione è rappresentata dall'utilizzo di metodi algebrici che sfruttino le relazioni esistenti tra la ripartizione e le marginali. Fanno parte di questa categoria le distribuzioni di Plackett che, utilizzando la tavola di contingenza (vedi figura 11), costruiscono il seguente odds

$$\text{ratio: } \theta = \frac{F(X_1, X_2)[1 - F_1(X_1) - F_2(X_2) + F(X_1, X_2)]}{[F_1(X_1) - F(X_1, X_2)][F_2(X_2) - F(X_1, X_2)]} = \frac{C(u, v)[1 - u - v + C(u, v)]}{[u - C(u, v)][v - C(u, v)]}$$

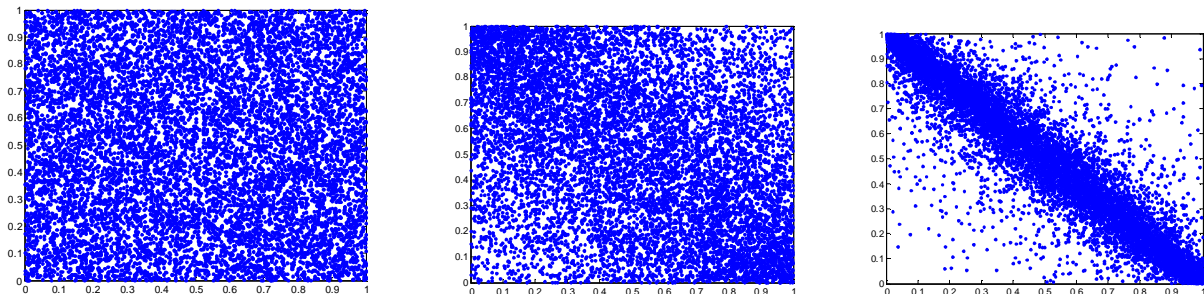
Imponendo le condizioni necessarie per la definizione di una Copula è possibile ottenere la forma funzionale della Copula di Plackett<sup>42</sup>:

$$C_\theta(u, v) = \frac{[1 + (1 - \theta)(u + v)] - \sqrt{[1 + (1 - \theta)(u + v)]^2 - 4uv\theta(1 - \theta)}}{2(\theta - 1)} \text{ per valori di } \theta \in (0, 1)^{43}.$$

**Figura 12: Tabelle di contingenza 2 x 2 in termini di probabilità**

	$\text{Pr ob}[X_1 \leq x_1]$	$\text{Pr ob}[X_1 > x_1]$
$\text{Pr ob}[X_2 \leq x_2]$	$F(X_1, X_2)$	$F_2(X_2) - F(X_1, X_2)$
$\text{Pr ob}[X_2 > x_2]$	$F_1(X_1) - F(X_1, X_2)$	$1 - F_1(X_1) - F_2(X_2) + F(X_1, X_2)$

**Figura 13: 10000 coppie (x,y) simulate della Copula di Plackett rispettivamente con parametri  $\theta$  pari a 1, 0.3 e 0.01**



<sup>42</sup> Per simulare una coppia di valori (u,v) dalla Copula di Plackett si fa riferimento al seguente algoritmo proposto da Johnson. Occorre generare due vettori (u,t) da una distribuzione uniforme, porre:  $a = t(1 - t)$ ,  $b = \theta + a(\theta - 1)^2$ ,

$c = 2a(u\theta^2 + 1 - u) + \theta(1 - 2a)$ ,  $d = \sqrt{\theta} \sqrt{\theta + 4au(1 - u)(1 - \theta)^2}$  e  $v = [c - (1 - 2t)d]/2b$

Vedi Nelsen (2006) pag 100

<sup>43</sup> Per  $\theta=1$  la Copula di Plackett coincide con la copula prodotto  $\Pi$  (vedi figura 13)

## 2.4 Le Copule: stima dei parametri e simulazione

Uno degli aspetti fondamentali nella stima delle copule è rappresentato dall'individuazione del o dei parametri della copula stessa.

Per compiere il processo di stima si fa generalmente riferimento ai principali metodi, richiamati brevemente nel seguito, proposti dall'inferenza statistica.

Tali metodi, basati sulla capacità di rappresentare la relazione esistente tra le variabili oggetto di studio, si distinguono tra metodi parametrici, caratterizzati dalla descrizione del meccanismo di generazione dei dati attraverso un modello noto, e i non parametrici, contraddistinti dalla non esigenza della definizione preventiva del modello.

La stima parametrica si basa sulla definizione di una successione di  $m$  vettori aleatori  $X_m = (X, Y)$  con distribuzione congiunta  $F$ , marginali  $F_1$  e  $F_2$  e copula  $C$  e dove la densità della distribuzione congiunta risulta pari a:  $f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2))f_1(x_1)f_2(x_2)$ .

Definito  $\Theta$  lo spazio dei parametri e  $\theta$  il vettore dei parametri da stimare, sarà possibile definire la seguente funzione di logverosimiglianza:

$$l(\theta) = \sum_{i=1}^m l_i(\theta) = \sum_{i=1}^m \ln[c(F_1(x_{1,i}), F_2(x_{2,i}))] + \sum_{i=1}^m \ln[f_1(x_{1,i})f_2(x_{2,i})].$$

Attraverso il classico metodo della massima verosimiglianza è possibile ottenere il vettore  $\theta$  che massimizza  $l(\theta)$ .

Un ulteriore metodo, definito Inference Function for Margins Method (IFM), si basa sull'estensione del metodo della massima verosimiglianza attraverso la separazione dei parametri delle distribuzioni marginali  $\theta_j$  dal parametro  $\alpha$  della copula ottenendo la seguente funzione di log-

verosimiglianza: 
$$l(\theta) = \sum_{i=1}^m l_i(\theta) = \sum_{i=1}^m \ln[c(F_1(x_{1,i}, \theta_1), F_2(x_{2,i}, \theta_2), \alpha)] + \sum_{i=1}^m \ln[f_1(x_{1,i}, \theta_1)f_2(x_{2,i}, \theta_2)].$$

La stima dei parametri avviene in due fasi: stima dei parametri  $\theta$  attraverso la massimizzazione

della funzione:  $\hat{\theta}_j = \arg \max_{\theta_j} \sum_{i=1}^m \ln(f_j(x_{i,j}, \theta_i))$  ed in seguito stima del parametro  $\alpha$  massimizzando

$$\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} \sum_{i=1}^m \ln[c(F_1(x_{1,i}, \hat{\theta}_1), F_2(x_{2,i}, \hat{\theta}_2), \alpha)].$$

Un terzo metodo, definito Canonical Maximum Likelihood Method (CML), supera l'ipotesi che i margini univariati abbiano una rappresentazione empirica e introduce il concetto di trasformazione marginale empirica. Le distribuzioni marginali  $F_i$  vengono approssimate da distribuzioni empiriche  $\hat{F}_i$ , lo stimatore di massima verosimiglianza del parametro  $\alpha$  si ottiene così dalla seguente

relazione:  $\hat{\alpha} = \arg \max_{\alpha} \sum_{i=1}^m \ln [c(u_j, v_j, \alpha)]$ , dopo aver trasformato la successione  $X_m$  di dati iniziali in variabili uniformi  $u_m=(u,v)$ .

Il principale metodo non parametrico si basa invece sull'utilizzo della copula empirica di Paul Deheuvels. Considerando infatti la successione ordinata  $X_m$ , con statistiche di rango  $r_k$  e  $s_k$ , ed ipotizzando che la funzione di ripartizione congiunta  $F$  sia continua, in modo che la copula sia unica, allora la copula  $C$ , definita sul reticolo  $L = \left\{ \left( \frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m} \right) : j_1 = 0 \dots m \right\}$  dalla funzione

$$C\left(\frac{j_1}{m}, \frac{j_2}{m}\right) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m 1\{r_k \leq j_1; s_k \leq j_2\}, \text{ è una copula empirica.}$$

Un ulteriore aspetto particolarmente rilevante per la sua valenza pratica è rappresentato dalla definizione di opportuni metodi di simulazione di vettori aleatori  $(x,y)$  partendo da una distribuzione congiunta nota  $F$  ed in cui le marginali presentano una particolare struttura di dipendenza.

Nel caso delle copule, il teorema di Sklar permette di semplificare il problema separando l'algoritmo in due parti:

- simulazione di vettori aleatori  $(u,v)$  dalla copula  $C$  che individua la struttura di dipendenza;
- utilizzo della funzione inversa delle distribuzioni marginali per la determinazione della coppia  $(x,y)$  generata dalla distribuzione congiunta

Per la simulazione della copula si utilizza generalmente il metodo della distribuzione condizionata basato sul seguente algoritmo:

- simulare due variabili aleatorie  $r$  e  $t$  distribuite secondo una uniforme nell'intervallo  $[0,1]$
- porre  $u=t$  e  $C_{v|u}(u,v)=r$
- ricavare  $v= [C_{v|u}(u,r)]^{-1}$

Il vettore  $(u,v)$  è generato dalla copula  $C$

La coppia  $(x,y)$  viene ottenuta utilizzando le inverse delle distribuzioni marginali:  $(x,y)=( [F_1(u)]^{-1}, [F_2(v)]^{-1})$ .

## 2.5 Le Copule: alcune famiglie

I metodi utilizzabili per la costruzione di copule sono, come è stato descritto in precedenza, molteplici, e nella pratica sono stati utilizzati per creare differenti tipologie di copule in grado di modellizzare svariate forme di dipendenza.



Nel seguito verranno presentate due particolari famiglie di copule: le copule sferiche ed ellittiche e le copule archimediane. Le prime assumono particolare importanza in quanto si basano sull'utilizzo di distribuzioni ellittiche, caratterizzate da un importante legame con il coefficiente di correlazione, le seconde invece sono rese particolarmente interessanti dalla relativa maneggevolezza matematica.

## 2.5.1 Le Copule Ellittiche

La classe delle distribuzioni ellittiche fornisce infatti utili esempi di distribuzioni multivariate in quanto condividono le stesse proprietà di trattabilità della distribuzione normale multivariata e, allo stesso tempo, consentono di modellizzare eventi estremi e forme di dipendenza diverse dalla normale. Le copule ellittiche sono semplicemente le copule delle distribuzioni ellittiche.

### COPULA GAUSSIANA

La più comune fra queste è rappresentata dalla Copula Normale o Gaussiana che corrisponde ad una distribuzione multivariata normale con matrice di correlazione lineare  $R$ .

Infatti un vettore casuale  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  è normale multivariato se e solo se:

- le distribuzioni marginali univariate sono Gaussiane
- la struttura di dipendenza tra tali marginali è descritta da un'unica funzione Copula (la copula normale)  $C$  tale che<sup>44</sup>:  $C_R^{Ga}(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$

dove  $\Phi_n$  indica la funzione di ripartizione della normale multivariata e  $\Phi^{-1}$  è l'inversa della di una normale standard.

Tale espressione può essere facilmente riscritta nel caso bidimensionale:

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\Pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ -\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dx_1 dx_2$$

Per simulare vettori  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  viene generalmente utilizzato il seguente algoritmo basato sulla decomposizione di Cholesky:

- Costruire la matrice  $B$  tramite l'algoritmo di Cholesky<sup>45</sup>. Nel caso bivariato tale matrice

$$\text{risulta pari a : } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}$$

<sup>44</sup> Tale relazione si ricava facilmente dal teorema di Sklar

<sup>45</sup> Occorre ricavare l'unica matrice triangolare  $B$  tale che  $R=BB'$ , con  $R$  matrice di correlazione lineare. Il seguente algoritmo proposto da Cholesky permette di calcolare gli elementi  $b_{i,j}$  del triangolo inferiore della matrice  $B$ :

$$b_{i,j} = \frac{\rho_{i,j} - \sum_{s=1}^{j-1} b_{i,s} b_{j,s}}{\sqrt{1 - \sum_{s=1}^{j-1} b_{j,s}^2}} \text{ per } 1 \leq j \leq i \leq n \text{ e con la convezione che } \sum_{s=1}^0 (\cdot) = 0$$

- Generare un vettore  $z=(z_1, z_2, \dots, z_n)$  di  $n$  realizzazioni indipendenti da una Normale standard
- Porre  $x=Bz$ <sup>46</sup>.
- Porre  $u=\Phi(x_i)$  dove  $\Phi$  rappresenta la distribuzione della Normale standard.
- Porre  $y_i=[F_Y(u_i)]^{-1}$  con  $F$  distribuzione della marginale.

Particolarmente interessante risulta anche il semplice legame presente tra il coefficiente di correlazione lineare  $\rho$  con il Tau di Kendall e il rho di Spearman nel caso della Copula Gaussiana. Tau- $\rho$ . Valgono infatti, anche nel caso multivariato, le seguenti relazioni<sup>47</sup>:

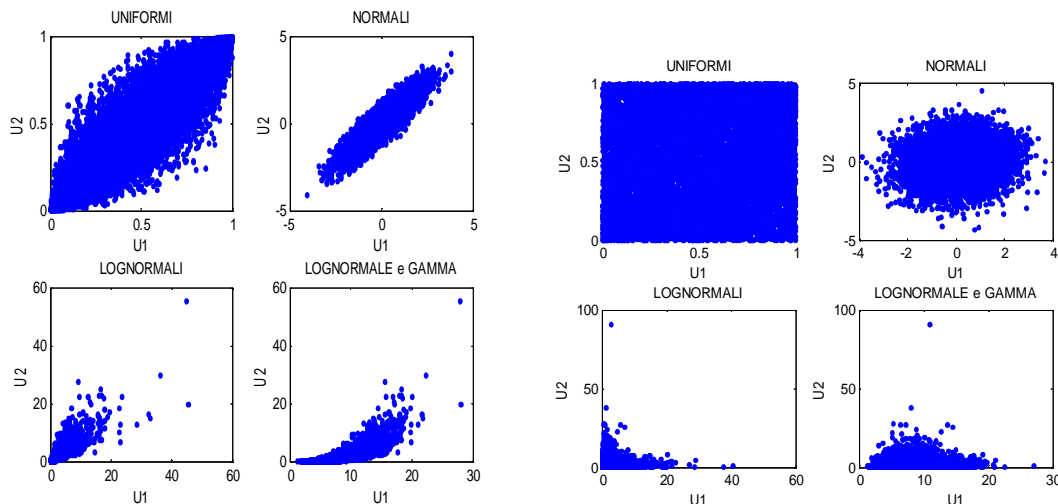
$$\tau_K(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho_{ij})$$

$$\rho_S(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{\rho_{ij}}{2}\right)$$

Un secondo aspetto è rappresentato dal fatto che la copula Gaussiana non è dotata di dipendenza di coda superiore ed inferiore se il coefficiente di correlazione lineare è inferiore a 1<sup>48</sup>.

Le figure seguenti mostrano alcune simulazioni della Copula Gaussiana ed evidenziano la diversa composizione della funzione bivariata al variare delle distribuzioni marginali (figura 14), considerando una identica struttura di dipendenza Gaussiana, e l'effetto derivante dalla variazione del coefficiente di correlazione lineare sulla struttura di dipendenza (figura 15).

**Figura 14: 10000 coppie di vettori simulati con la Copula Gaussiana e con differenti distribuzioni marginali (due Uniformi (0,1), due Normali Standard, due LogNormali (0,1), una LogNormale (0,1) e una Gamma (8,1)) per due differenti valori di  $\rho$  (0.9 e 0.1, ovvero Tau=0.7129 e 0.0638)**

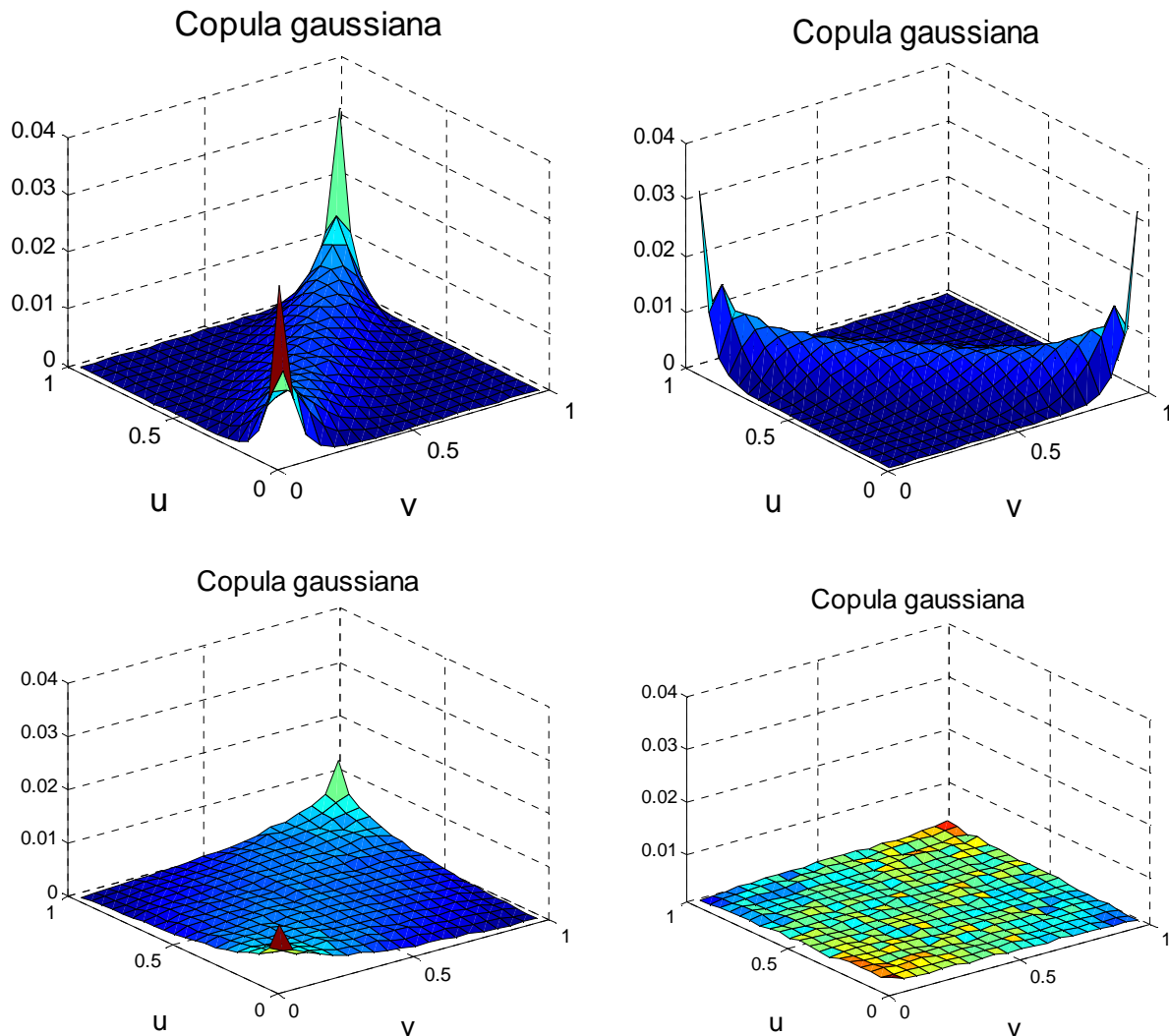


<sup>46</sup> X avrà la seguente funzione di densità congiunta:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^n |R|} \exp\left\{-\frac{1}{2} x' R x\right\}$

<sup>47</sup> Si veda in proposito: Wang, "Aggregation of correlated portfolios: Models and Algorithms", PCAS, 1998, pag.888-889

<sup>48</sup> Si veda in proposito: Embrechts, Lindskog, Mc Neil, "Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management"

**Figura 15:** Funzione di probabilità della Copula Gaussiana con marginali Uniformi per quattro valori di  $\rho$  (0.9 e -0.9, 0.5 e 0.1) ottenute con 100000 simulazioni



## COPULA T

L'altra importante copula ellittica è la copula  $t_v$ , che come la copula normale è associata ad una distribuzione multivariata, in questo caso la  $t$ .

La copula  $t_v$  ha la seguente forma:  $C_{v,R}^t(u_1, u_2, \dots, u_n) = \Theta_{v,R}^n(t^{-1}(u_1), \dots, t^{-1}(u_n))$  dove  $\Theta$  indica la distribuzione congiunta  $t$  con  $v$  gradi di libertà e matrice di correlazione  $R$ <sup>49</sup> e  $t^{-1}$  corrisponde all'inversa di una distribuzione univariata  $t$ .

<sup>49</sup> La densità di una distribuzione  $t$  con  $v$  gradi di libertà e dimensione  $n$  è la seguente:

$$f(x) = \frac{\Gamma(v+n)/2}{\Gamma(v/2)(\Pi v)^{n/2}} |R|^{-1/2} [1 + v^{-1}(x - \mu)' R^{-1}(x - \mu)]^{-(v+n)/2}$$

Nel caso bidimensionale la copula assume la seguente forma analitica<sup>50</sup>:

$$C'_{v,R}(u_1, u_2) = \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\Pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2\rho st + t^2}{v(1-\rho^2)} \right\}^{-(v+2)/2} ds dt$$

Anche in questo caso esiste un algoritmo che permette la simulazione di vettori n-dimensionali di variabili dalla copula t:

- Costruire la matrice triangolare B attraverso la formula di Cholesky vista in precedenza.
- Simulare n variabili indipendenti  $y_1, y_2, \dots, y_n$  dalla distribuzione Normale standard
- Simulare una variabile casuale s indipendente dalle  $y_i$  da una distribuzione  $\chi^2$  con v gradi di libertà
- Porre  $z = By$
- Porre  $a = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{s}} y$ <sup>51</sup>
- Porre  $u_i = t_v(a_i)$  dove t è la distribuzione t con v gradi di libertà
- Porre  $y_i = [F_Y(u_i)]^{-1}$  con F distribuzione della marginale.

In questo caso non esiste una relazione analitica che lega il tau di Kendall e il rho di Spearman al coefficiente di correlazione lineare, esiste invece una relazione analitica che permette di determinare i due limiti della dipendenza di coda:

$$L = R = 2 - 2t_{v+1} \left[ \sqrt{v+1} \frac{\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}} \right]$$

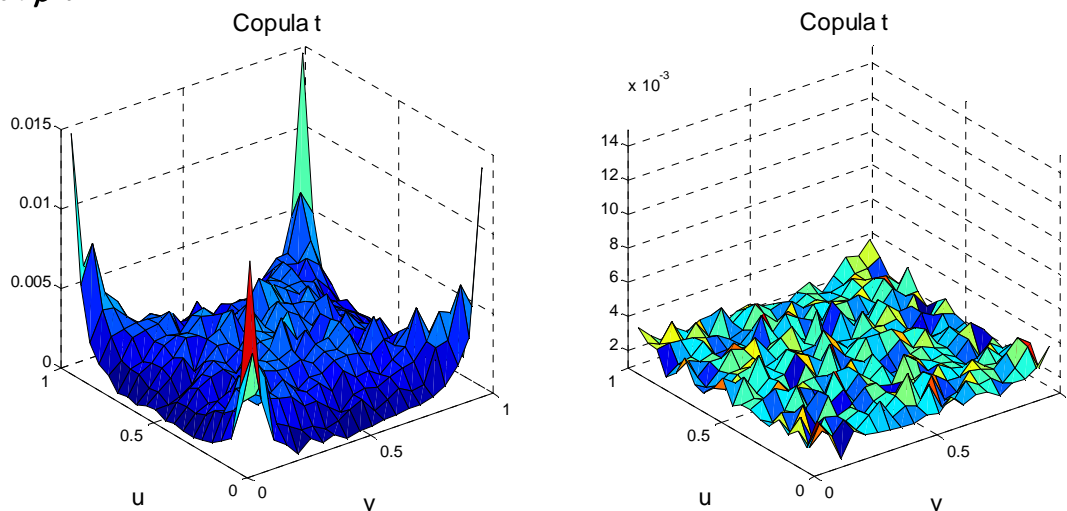
Si può osservare che la copula t ha dipendenza della coda superiore, tale dipendenza è crescente in funzione di v e  $\rho$ . La copula t risulta dunque più adatta della Gaussiana per simulare eventi estremi. Si può infatti notare dal grafico (figura 16) che, in presenza di un numero ridotto di gradi di libertà, la copula t presenta un doppio trend sia positivo che negativo. Tale particolare andamento si manifesta anche nel caso il coefficiente di correlazione assuma valore pari a 0: a differenza della copula Gaussiana si osservano infatti trend positivi e negativi che quando  $\rho=0$  si compensano.

<sup>50</sup> Tale relazione vale per  $v > 2$ . La matrice di correlazione non risulta, infatti, definita per gradi di libertà inferiori o uguali a 2.

<sup>51</sup> Tale uguaglianza deriva dalla ben nota relazione che permette di ottenere una distribuzione t:

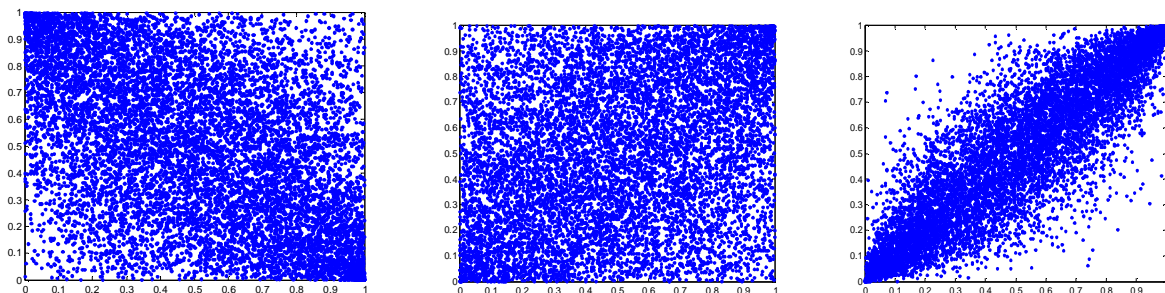
$$X = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{\chi_v^2}} N(0, R) + \mu$$

**Figura 16:** Funzione di probabilità della Copula  $t$  con due differenti gradi di libertà (3, 10) con marginali Uniformi con  $\rho=0$



La variazione del coefficiente di correlazione lineare mostra il diverso grado di dipendenza (vedi figura 17), e per valori più elevati di  $\rho$ , rende la copula  $t$  di student più simile alla copula Gaussiana.

**Figura 17:** 10000 coppie di vettori simulati con la Copula  $t$  con 10 gradi di libertà e con differenti coefficienti di correlazione lineare (nell'ordine: -0.5, 0.3, 0.9)



## 2.52 Le Copule Archimediane

La famiglia delle copule archimediane assume, come anticipato in precedenza, particolare importanza nella pratica a causa della relativa facilità di costruzione. Sono infatti costruibili attraverso l'ausilio di un'unica funzione unidimensionale soddisfacente semplici proprietà. La classe archimediana risulta pertanto ampia e variegata: il fatto che comprenda distribuzioni tra loro molto diverse permette di avere un campionario ricco dal quale attingere i modelli di descrizione della realtà. A ciò si aggiungono anche altre proprietà formali che semplificano operativamente gli algoritmi di simulazione.

Il concetto di copula archimediana si fonda sulla capacità di scindere la funzione di ripartizione congiunta tra le due marginali attraverso l'utilizzo di una funzione  $\lambda(t)$  positiva e con  $t$  che assume valori nell'intervallo  $(0,1)$ :  $\lambda(F(x_1, x_2)) = \lambda(F_1(x_1)) \cdot \lambda(F_2(x_2))$ .

Ponendo  $\varphi(t) = -\ln(\lambda(t))$  è possibile riscrivere tale relazione nel modo seguente:  $\varphi(F(x_1, x_2)) = \varphi(F_1(x_1)) + \varphi(F_2(x_2))$  ed in termini di copule:  $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ .

Sklar e Schweizer dimostrano che le copule che soddisfano la seguente relazione prendono il nome di copule archimediane:  $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))^{52}$ .

La copula risulta quindi generata dalla funzione  $\varphi^{53}$ , che prende il nome di generatore, e dalla sua pseudo-inversa  $\varphi^{-1}$  e si dimostra che la convessità della funzione generatrice è condizione sufficiente perché  $C$  sia una copula.

Esistono inoltre numerosi teoremi che dimostrano le numerose proprietà di tali copule, di cui nel seguito sono elencate le principali:

- $C$  è simmetrica:  $C(u, v) = C(v, u)$  per ogni  $u, v$  appartenenti all'intervallo  $(0, 1)$
- $C$  è associativa:  $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$  per ogni  $u, v, w$  appartenenti all'intervallo  $(0, 1)$
- se  $\varphi$  è una funzione generatrice, anche  $c\varphi$  lo è, per qualsiasi  $c$ , costante generica positiva
- sia  $C$  una copula archimediana con generatore  $\varphi$  allora la  $C$ -misura<sup>54</sup> della curva di livello è

$$\varphi(t) \left[ \frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)} \right]$$
 dove  $\varphi'(t^-)$  e  $\varphi'(t^+)$  rappresentano i limiti destro e sinistro della derivata prima in  $t$ .

- date due variabili aleatorie uniformi  $U, V$  e sia definita la copula  $C$  archimediana associata a  $(U, V)$ , allora la funzione  $K_C$ , definita per ogni  $t$  pari a  $t - [\varphi(t)/\varphi'(t^+)]$ , è la funzione di ripartizione di  $C(U, V)^{55}$ .
- una copula  $C$  è una copula archimediana se è doppiamente differenziabile ed esiste una funzione integrabile  $f$  tale che:  $f(v)(dC(u, v)/du) = f(u)(dC(u, v)/dv)^{56}$

<sup>52</sup> Data questa relazione numerose copule possono essere costruite abbastanza facilmente: ad esempio definendo  $\varphi(t) = -\ln(t)$  si ottiene  $C(u, v) = \exp(-(-\ln(u) - \ln(v))) = u \cdot v$  che non è altro che la copula prodotto  $\Pi$  definita in precedenza.

<sup>53</sup> Si ricorda che dato un insieme  $\Phi$  di funzioni  $\varphi$  continue, strettamente decrescente, convesse e definite sull'intervallo  $(0, 1)$  e per le quali  $\varphi(0) = \infty$  e  $\varphi(1) = 0$ , allora ciascuna  $\varphi$  ammette un'inversa con le stesse proprietà eccetto che  $\varphi^{-1}(0) = 1$  e  $\varphi^{-1}(\infty) = 0$ .

<sup>54</sup> Data due variabili aleatorie  $X$  e  $Y$  definite in  $R$  e con funzione congiunta  $F$ , definito  $A$  un sottoinsieme di  $R^2$ , allora la  $F$ -misura di  $A$  è data da:  $P(X, Y)$  dove  $(X, Y) \sim F$  e  $P$  appartiene ad  $A$ .

<sup>55</sup> Tale relazione è stata estesa da Genest e Rivest nel modo seguente: date due variabili aleatorie uniformi  $U$  e  $V$  e data la copula archimediana  $C$  associata, allora la funzione di ripartizione congiunta  $F(x, y)$  delle variabili aleatorie  $x = \varphi(u)/(\varphi(u) + \varphi(v))$  e  $y = C(u, v)$  è ottenuta dalla seguente relazione:  $F(x, y) = xK_C(y)$

<sup>56</sup> Tale teorema prende il nome di Criterio di Abel e viene spesso utilizzato come definizione alternativa delle copule archimediane.

Nel caso delle copule archimediane esiste inoltre un'importante relazione di dipendenza analitica tra il  $\tau_K$  e la funzione generatrice  $\varphi$ . Infatti date due variabili aleatorie distribuite secondo la copula

archimediana di generatore  $\varphi$ , allora il  $\tau_K$  per il vettore  $(X,Y)$  è dato da:  $\tau_K = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt$

Infine per la simulazione delle copule archimediane viene generalmente proposto il seguente algoritmo basato sul metodo classico di simulazione delle copule:

- Simulare due variabili aleatorie  $r$  e  $t$  uniformemente distribuite
- Porre  $u=t$  e  $C_{2|1}(u,v)=r$
- Ricavare  $v=\varphi^{-1}\{\varphi[(\varphi')^{-1}(\varphi'(u)/r)]-\varphi(u)\}$

Genest e Rivest hanno proposto anche un algoritmo alternativo basato sulla funzione  $K_C$ , definita in precedenza (vedi proprietà delle copule archimediane e nota 52):

- Simulare due variabili aleatorie  $r$  e  $t$  uniformemente distribuite
- Porre  $s=t$  e  $q=[K_C(r)]^{-1}$
- Porre  $u=\varphi^{-1}[s\varphi(q)]$  e  $v=\varphi^{-1}[(1-s)\varphi(q)]$

### 2.5.3 Copule Archimediane Uniparametriche

Sono ora presentate alcune famiglie di copule archimediane di tipo uniparametrico.

#### FAMIGLIA DI CLAYTON

Questa famiglia di copule è stata introdotta da Clayton<sup>57</sup> nel 1978 ed è definita dal seguente funzionale:

$$C_\theta(u, v) = \max[(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}, 0]$$

con  $\theta \geq -1$  e  $\theta \neq 0$  e funzione generatrice  $\varphi_\theta(t)=(t^{-\theta}-1)(1/\theta)$ .

Il caso interessante è quello in cui il parametro  $\theta$  assume valori positivi in quanto il generatore è un generatore stretto e la copula si riduce a:  $C_\theta(u, v) = (u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$  assumendo i seguenti valori per la funzione  $K$  e per il  $\tau$ :

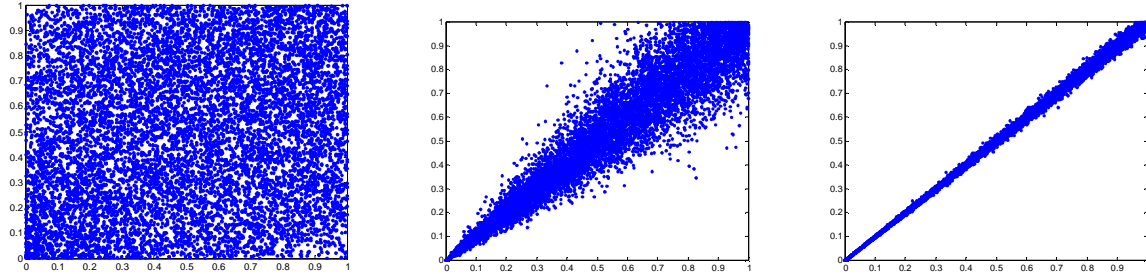
$$K_{C,\theta}(t) = t + \frac{t}{\theta} + \frac{t^{(\theta+1)}}{\theta}, \quad \tau_{K,\theta}(t) = \frac{\theta}{\theta+2}.$$

Per generare coppie casuali  $(u,v)$  aventi una funzione di ripartizione congiunta associata ad una copula di Clayton di parametro<sup>58</sup>:

<sup>57</sup> Clayton (1978), "A Model for Association in bivariate life table and its application in epidemiological studies of familial tendency in chronic disease incidence", Biometrika 65

- Generare u e q uniformi indipendenti
- Porre  $v = [(q^{-\theta/(1+\theta)} - 1)u^{-\theta} + 1]^{-(1/\theta)}$

**Figura 18:** 10000 coppie di vettori simulati con la Copula Clayton con differente parametro  $\theta$  (0.2, 10 e 100, con  $\tau$  pari a 0.5, 0.8333, 0.9804)



## FAMIGLIA DI COOK-JOHNSON

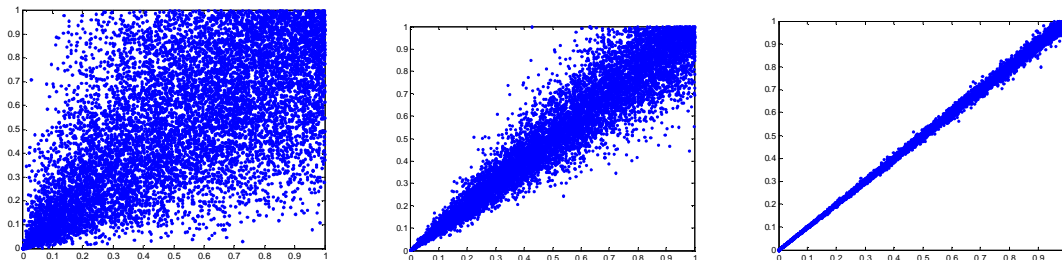
Una struttura molto simile a quella della copula Clayton è la seguente, assunta dalla copula di Cook-Johnson, che definisce la seguente k-dimensionale funzione multivariata uniforme:

$$F_{U_1, U_2, \dots, U_n}^{(\theta)} = \left\{ \sum_{j=1}^k u_j^{-1/\theta} - k + 1 \right\}^{-\theta} \quad \text{con} \quad \tau_{K, \theta}(t) = \frac{1}{1 + 2\theta}$$

Viene inoltre proposto il seguente algoritmo generatore<sup>59</sup>:

- simulare due variabili x, y distribuite secondo una esponenziale con parametro 1
- simulare una variabile z indipendente da x e y distribuita secondo una Gamma( $\theta$ , 1)
- porre  $u = (1 + (x/z))^{-\theta}$  e  $v = (1 + (y/z))^{-\theta}$

**Figura 19:** 10000 coppie di vettori simulati con la Copula Cook-Johnson con differente parametro  $\theta$  (0.5, 0.1 e 0.01, con  $\tau$  pari a 0.5, 0.8333, 0.9804)



Si può osservare dai grafici (figura 18 e 19) che la copula di Cook-Johnson assume un andamento molto simile a quella di Clayton. Si osserva una dispersione maggiore a parità di  $\tau$  della copula di Clayton per i valori più bassi.

<sup>58</sup> Vedi Embrechts, Lindskog, McNeil, “Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management”

<sup>59</sup> Vedi Wang, “Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms” pag 885 e seguenti



Infine, come era lecito attendersi, la riduzione del parametro  $\theta$  provoca una maggiore dipendenza nel caso della copula di Cook-Johnson.

#### FAMIGLIA di ALI-MIKHAIL-HAQ

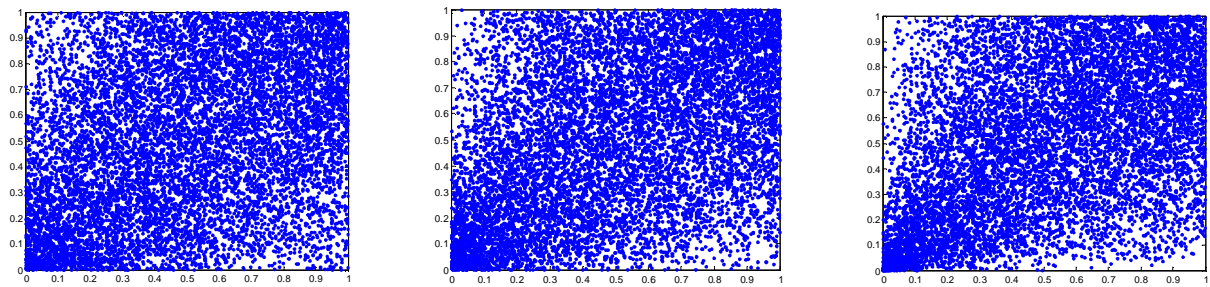
Una seconda tipologia di copule è quella introdotta da Ali-Mikhail-Haq<sup>60</sup>, ottenuta facendo in modo che l'odds di sopravvivenza soddisfacesse una determinata relazione.

Tale copula è caratterizzata dal seguente funzionale:  $C_{\theta}(u, v) = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$

con parametro  $\theta$  compreso tra -1 e 1, funzione generatrice  $\varphi_{\theta}(t) = \ln \frac{1 - \theta(1-t)}{t}$  e Tau di Kendall

$$\tau_{k,\theta} = \frac{3\theta - 2}{\theta} - \frac{2}{3} \left( \frac{\theta - 1}{\theta} \right)^2 \ln(1 - \theta).$$

**Figura 20:** 10000 coppie di vettori simulati<sup>61</sup> con la Copula Ali-Mikhail-Haq con differente parametro  $\theta$  (0.775, 0.9175, 0.99, con  $\tau$  pari a 0.5, 0.833, 0.98)



#### FAMIGLIA DI GUMBELL –HOUGAARD

Si tratta di una famiglia di copule utile quando si ha a che fare con rischi di tipo catastrofe, il cui funzionale è il seguente:  $F_{\theta}(u, v) = \exp[-(\ln(u)^{-\theta} + \ln(v)^{-\theta})]^{1/\theta}$  con parametro  $\theta \geq 1$ , funzione

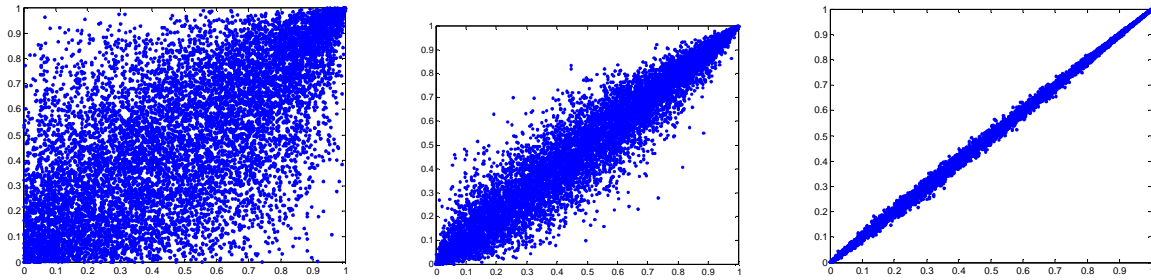
generatrice  $\varphi_{\theta}(t) = [-\ln t]^{\theta}$ , Tau di Kendall  $\tau_{k,\theta} = \frac{\theta - 1}{\theta}$  e funzione K pari a:  $K_{C,\theta} = t - \frac{t \ln t}{\theta}$

Si può osservare dai grafici (figura 21) come la copula di Gumbel prevede a parità di Tau di Kendall una minore dispersione rispetto alle copule analizzate in precedenza.

<sup>60</sup> Ali, Mikhail, Haq (1978), "A class of bivariate distributions including the bivariate logistic", Journal of Multivariate Analysis, 8

<sup>61</sup> Per la simulazione è stato utilizzato l'algoritmo proposto da Genest e Rivest descritto in precedenza, utilizzando la funzione  $K_C$  relativa alla copula in oggetto e la seguente funzione inversa del generatore:  $[\varphi_{\theta}(t)]^{-1} = (1 - \theta) / [\exp(t) - \theta]$ . E' possibile utilizzare anche il seguente algoritmo proposto da Johnson: generare due variabili aleatorie u e t distribuite secondo una uniforme (0,1), porre  $a = 1 - u$ ,  $b = -\theta(2at + 1) + 2\theta^2 a^2 t + 1$  e  $c = \theta^2(4a^2 t - 4at + 1) - \theta(4a^2 t - 4t + 2) + 1$  e  $v = [2t(a - \theta - 1)^2] / [b + c^{1/2}]$

**Figura 21** 10000 coppie di vettori simulati con la Copula Gumbel con differente parametro  $\theta$  (2,6, 50 con relativi  $\tau$  pari a 0.5 0.8333 e 0.98)



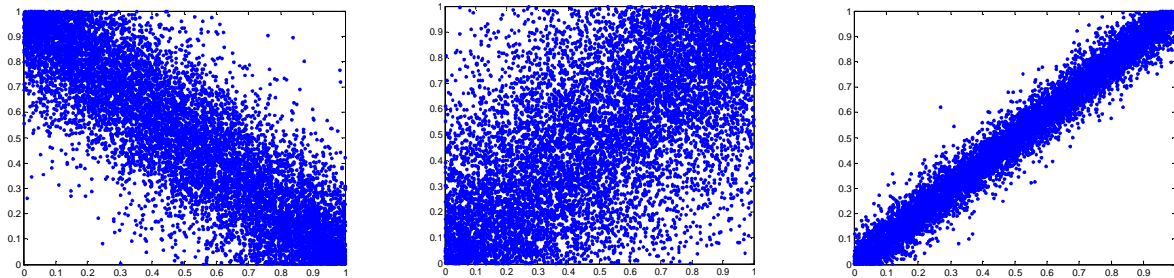
## FAMIGLIA DI FRANK

Questa famiglia di copule è stata affrontata per la prima volta da Frank<sup>62</sup> e si basa sul seguente

funzionale:  $C_{\theta}(u, v) = \frac{1}{\theta} \ln(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)})$  con  $\varphi_{\theta}(t) = \ln \frac{(e^{-\theta t} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)}$ ,

$$K_{C,\theta}(t) = t + \frac{1}{\theta} \frac{(e^{-\theta t} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \ln \left[ \frac{(e^{-\theta t} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)} \right] \text{ e } \tau_{K,\theta}(t) = 1 - \frac{4}{\theta} \left[ 1 - \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{t}{e - 1} dt \right].$$

**Figura 22** 10000 coppie di vettori simulati con la Copula Frank con differente parametro  $\theta$  (-10, 5 e 35)



## 2.5.4 Copule Archimediane Multiparametriche e Copule Multivariate

Le copule archimediane a due parametri sono generalmente delle estensioni dei casi uniparametrici, ottenibili sia attraverso la composizione di un generatore e della funzione potenza, sia attraverso funzioni razionali.

Nel primo caso, stabilito un generatore  $\varphi$  è possibile ottenere famiglie di copule attraverso la funzione potenza: definiti infatti due numeri reali positivi  $a$  e  $b$ , con  $a$  appartenente all'intervallo

<sup>62</sup> Vedi Frank, "On the simultaneous associativity of  $F(x,y)$  and  $x+y-F(x,y)$ ", *Acquationes Math.*, 19

$(0,1)$  e  $b \geq 1$ ; è possibile ottenere famiglie di generatori<sup>63</sup> tramite le relazioni  $\varphi_{a,1}(t) = \varphi(t^a)$  e  $\varphi_{b,1}(t) = [\varphi(t)]^b$ .

Altre tipologie di copule sono funzioni razionali, ovvero possono essere espresse come rapporto tra due funzioni polinomiali: affinché una funzione razionale possa essere una copula archimediana, quindi simmetrica, associativa e tale da soddisfare i valori propri di ogni copula, deve avere la forma:  $C_{a,b}(u,v) = \frac{uv - b(1-u)(1-v)}{1 - a(1-u)(1-v)}$ <sup>64</sup> per opportuni valori di  $a$  e  $b$ .

Si dimostra che fissato un generatore  $\varphi$ , è possibile ottenere i valori di  $a$  e  $b$  tramite la seguente

relazione:  $\frac{\varphi'_{a,b}(u)}{\varphi'_{a,b}(v)} = \frac{av^2 + (1-a-b)v + b}{au^2 + (1-a-b)u + b}$  e dunque  $\varphi'_{a,b}(t) = \frac{-k_{a,b}}{at^2 + (1-a-b)t + b}$  con  $k$  costante.

E' possibile infine estendere le copule archimediane al caso multivariato utilizzando la seguente relazione:  $C_n(u_1, u_2, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_n))$ .

Numerose famiglie hanno applicabilità in dimensione maggiore di due, fra queste è possibile segnalare le due copule seguenti:

- Famiglia di Frank: dato il parametro  $\theta$  e il generatore  $\varphi(t) = -\ln[(\exp(-t\theta)-1)/(\exp(-\theta)-1)]$  si ottiene la seguente copula:  $C_\theta(u_1, u_2, \dots, u_n) = -\frac{1}{\theta} \left[ 1 + \frac{(e^{-\theta u_1} - 1) \cdot \dots \cdot (e^{-\theta u_n} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{n-1}} \right]$
- Famiglia di Clayton: dato il parametro  $\theta$  e il generatore  $\varphi(t) = (1/\theta)(t^\theta - 1)$  si ottiene la seguente copula:  $C_\theta(u_1, u_2, \dots, u_n) = [u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta} - n + 1]^{-1/\theta}$

## Conclusioni

Nel presente capitolo è stato sottolineato come il coefficiente di correlazione lineare presenta, al di fuori delle distribuzioni ellittiche, numerose limitazioni e come di conseguenza la conoscenza delle distribuzioni marginali e del coefficiente  $\rho$  non garantisce la determinazione univoca della funzione di ripartizione congiunta.

Appare dunque necessaria una più accurata valutazione delle dipendenze attraverso l'utilizzo di copule in grado di rappresentare la struttura di dipendenza delle marginali.

<sup>63</sup> Ad esempio considerando il generatore  $\varphi(t) = -\ln(t)$  è possibile ottenere la seguente copula a due parametri:

$$C_{a,b}(u,v) = \exp \left( - \frac{\left\{ \left[ -\ln(u^a) \right]^b + \left[ -\ln(v^a) \right]^b \right\}^{1/b}}{a} \right)$$

<sup>64</sup> Ad esempio la copula è una semplice copula archimediana razionale.

In realtà le copule presentate sono numerose e occorre verificare, per ogni fenomeno, quali marginali e quale copula siano in grado di meglio descrivere sia il comportamento univariato, sia quello multivariato del fenomeno in oggetto.

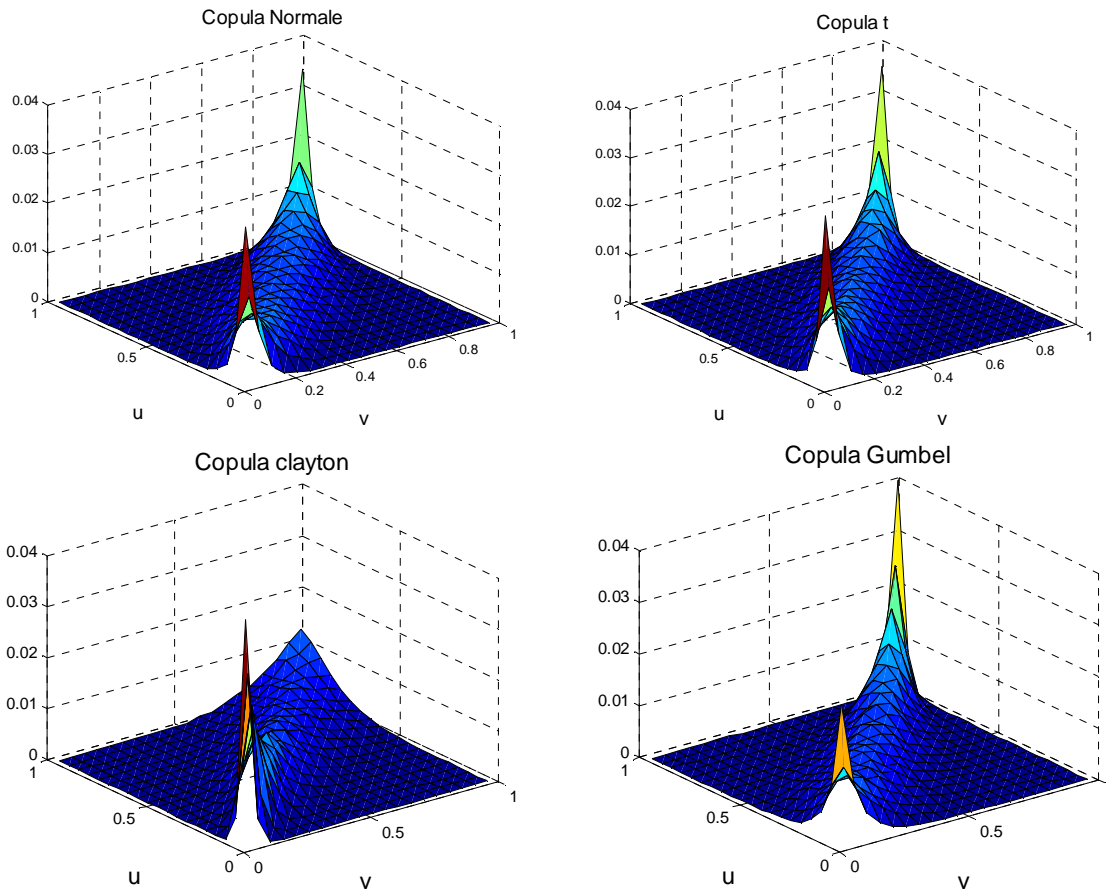
Nel seguito verranno presentate alcune applicazioni allo scopo di evidenziare le principali differenze tra le copule descritte in precedenza.

**Figura 23: Funzionale e Tau di Kendall relativi alle principali copule esaminate in precedenza**

Nome	Funzionale C(u,v)	$\tau_k$
Copula Prodotto	$C=uv$	0
Normale	$C=H(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$(2/\pi)\text{Arcsin}(\rho)$
Cook-Johnson	$C_\theta=[u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1]^{-\theta}$	$1/(1+2\theta)$
Marshall-Olkin	$C(a,b)=uv \min(u^{-a}, u^{-b})$	$ab/(a-ab+b)$
F.-Gumbel-Morg.	$C_\theta=uv + \theta uv(1-u)(1-v)$	$2\theta/9$
Plackett	$C_\theta = \frac{[1 + (1 - \theta)(u + v)]}{2(\theta - 1)} - \frac{\sqrt{[1 + (1 - \theta)(u + v)]^2 - 4uv\theta(1 - \theta)}}{2(\theta - 1)}$	
Ali-Mikhail-Haq	$C_\theta = \frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$C_\theta = \frac{3\theta - 2}{\theta} - \frac{2}{3} \left( \frac{\theta - 1}{\theta} \right)^2 \ln(1 - \theta)$
Clayton	$C_\theta=[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}$	$\theta/(\theta+2)$
Frank	$C_\theta = -\frac{1}{\theta} \ln \left[ 1 + \left( \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right) \right]$	$1 - \frac{4}{\theta} \left[ 1 - \frac{1}{\theta} \int_0^\theta \frac{t}{e - 1} dt \right]$
Gumbel-Hougaard	$C_\theta = \exp \left[ - \left[ (-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta \right]^{1/\theta} \right]$	$(\theta-1)/(\theta)$

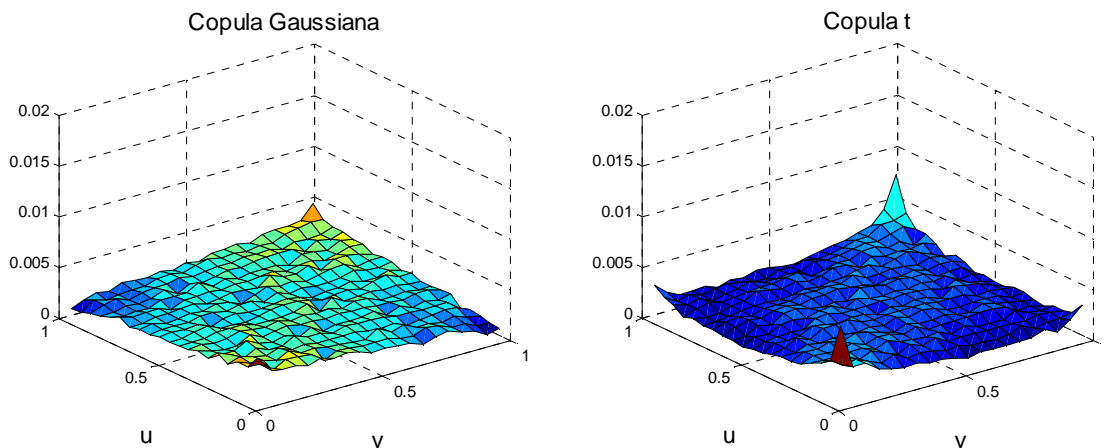
Dai grafici si può osservare, nel caso di marginali uniformi, come le diverse copule ci permettono di ottenere diverse strutture di dipendenza. In particolare per valori di  $\tau$  particolarmente elevati si osserva un comportamento quasi identico delle due copule ellittiche; mostrano invece comportamenti più caratteristici la copula di Clayton e la copula Gumbel, la prima identifica una coda sinistra particolarmente accentuata, la seconda invece esalta la dipendenza sulla coda destra.

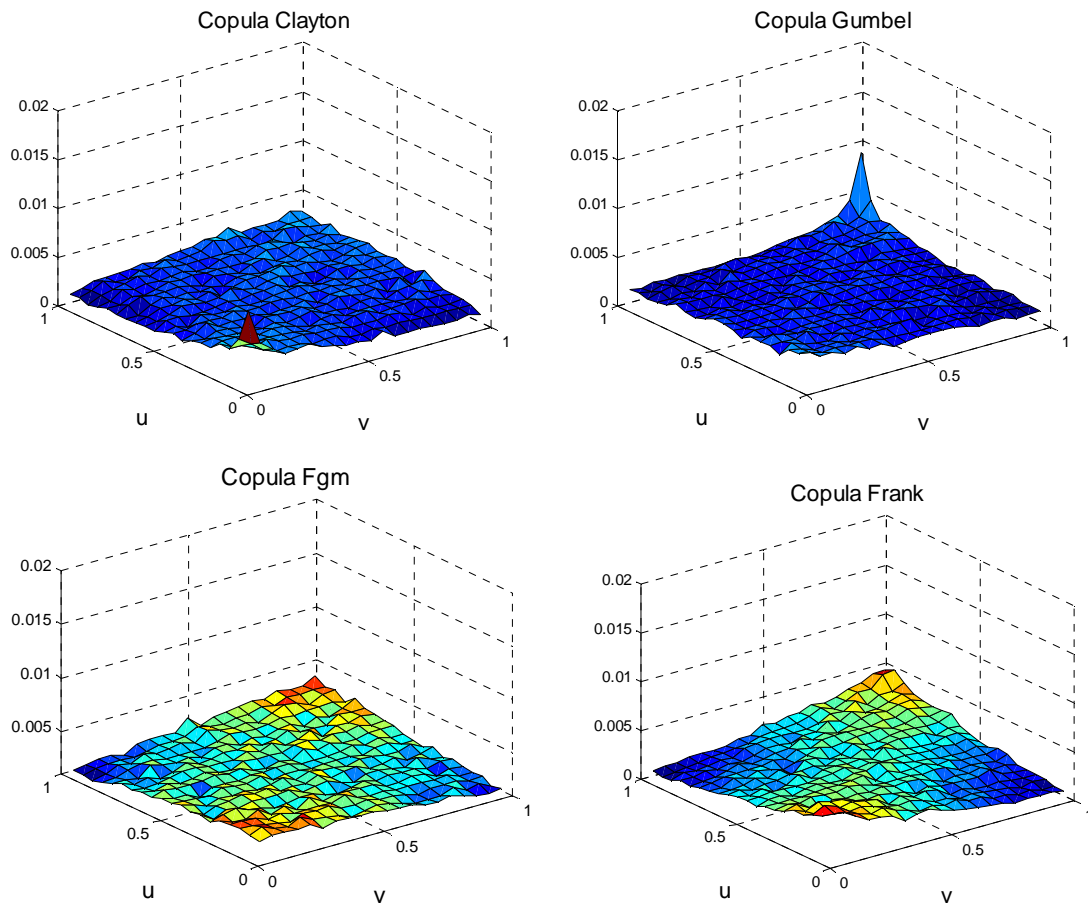
**Figura 24:** Funzione di probabilità calcolata con 100000 simulazioni per Tau pari a 0.75 e differenti copule (Gaussiana,  $t_5$ , Clayton ( $\theta=6$ ), Gumbel ( $\theta=4$ ))



Anche nel caso si consideri una situazione di scarsa dipendenza ( $\tau=0.1$ ) si osservano le code pronunciate delle copule Gumbel e Clayton. Si manifesta inoltre il comportamento particolare della copula  $t$  con la classica forma a croce, già menzionata in precedenza. Si osserva infine la situazione di dipendenza debole descritta dalla copula di Farlie-Gumbel-Morgenstern.

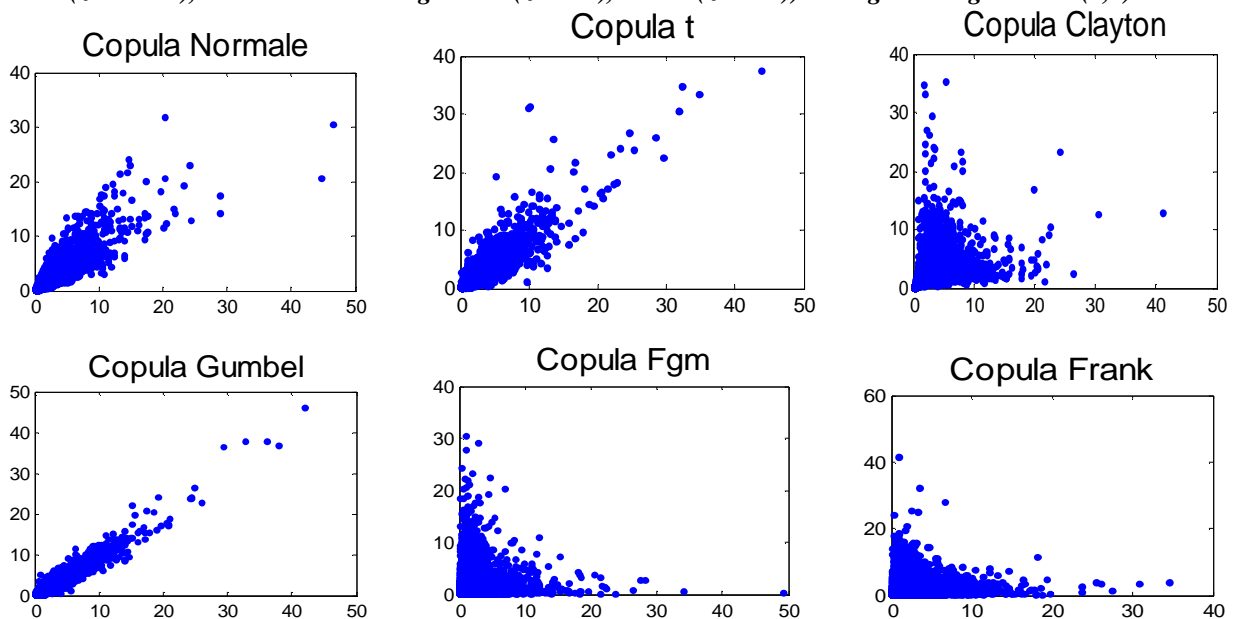
**Figura 25:** Funzione di probabilità calcolata con 100000 simulazioni per  $\tau = 0.1$  e differenti copule (Gaussiana,  $t_5$ , Clayton ( $\theta=0.2222$ ), Gumbel ( $\theta=0.1111$ ), Farlie Gumbel Morgenstern ( $\theta=0.45$ ), Frank ( $\theta=1.98$ ))





Particolarmente interessante è anche l'analisi del differente comportamento delle distribuzioni multivariate simulate e costruite utilizzando marginali distribuite secondo delle LogNormali(0,1) e diverse strutture di dipendenza. In particolare si osserva l'elevata dipendenza di coda della copula t e della Gumbel.

**Figura 26:** 100000 coppie simulate per  $\text{Tau} = 0.75$  con differenti copule (Gaussiana,  $t_5$ , Clayton ( $\theta=0.2222$ ), Gumbel( $\theta=0.1111$ ), Farlie Gumbel Morgenstern( $\theta=0.45$ ), Frank ( $\theta=1.98$ )) e marginali LogNormali (0,1)



### 3 Differenti misure di rischio

#### *Introduzione*

Uno degli aspetti determinanti nella scelta dell'ipotetico requisito patrimoniale individuato dalle autorità di vigilanza è rappresentato dall'individuazione della più idonea misura di rischio.

Sia la vastissima letteratura in questo campo, sia la scelta di differenti misure nei diversi approcci di solvibilità proposti recentemente (vedi capitolo 1), mostrano la crescente attenzione e l'importanza risposta nella scelta di un corretto criterio di misurazione.

Il concetto di Value at Risk (Var) ha assunto negli ultimi anni il ruolo di misura standard da utilizzare per la valutazione dell'esposizione al rischio. In realtà la necessità di determinare quali proprietà dovrebbe possedere un'idonea misura, ha prodotto una vasta letteratura riguardante lo studio delle misure di rischio portando all'introduzione dell'importante concetto di misure di rischio coerenti<sup>65</sup>.

L'introduzione del concetto di subadditività e le difficoltà, provocate da una valutazione basata sull'utilizzo di una misura non subadditiva, come il Var, hanno portato all'introduzione di misure alternative fra le quali l'Expected Shortfall(ES).

#### **3.1 Misure di rischio coerenti**

La necessità di disporre di misure di rischio coerenti è naturale quando si considerano fenomeni soggetti ad aleatorietà: divengono in questo caso indispensabili una definizione di rischio e di misura coerente dello stesso. Una misura coerente di rischio consentirebbe, infatti, di confrontare le diverse situazioni in esame e fornirebbe un criterio di scelta omogeneo.

Non esiste una definizione univoca di misura coerente di rischio ma generalmente si fa riferimento all'approccio proposto da Artzner e altri<sup>66</sup>.

In particolare introducendo lo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , l'orizzonte temporale  $\Delta$ , l'insieme finito  $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$  di tutti i rischi e il sottoinsieme dei rischi finanziari  $\mathcal{M} \subset L^0$ , generalmente ipotizzato un cono convesso<sup>67</sup>, si definisce misura di rischio la funzione  $\rho(x): \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  che soddisfa le quattro proprietà introdotte da Artzner e che verranno definite nel seguito.

---

<sup>65</sup> Si veda in proposito: Coherent Risk Measures, P. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber, D. Heath, 1998

<sup>66</sup> Si veda P. Artzner, F. Delbaen, J-M. Eber [1998]

<sup>67</sup> In particolare si dimostra che se  $L_1 \in \mathcal{M}$  e  $L_2 \in \mathcal{M}$  allora  $L_1 + L_2 \in \mathcal{M}$  e  $\lambda L_1 \in \mathcal{M}$  per ogni  $\lambda > 0$

La funzione  $\rho(L)$  può essere interpretata come l'ammontare di capitale che dovrebbe essere aggiunto ad una posizione con perdita  $L$  in modo che la posizione divenga accettabile ad un regolatore esterno od interno<sup>68</sup>.

Allo scopo di definire una misura di rischio  $\rho(L)$  coerente, occorre soddisfare le seguenti proprietà:

- Invarianza per traslazione: per qualsiasi  $L \in \mathcal{M}$  e per qualsiasi  $l \in \mathbb{R}$  si ha  $\rho(L+l) = \rho(L)+l$  ;
- Subadditività: per qualsiasi  $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  si ha  $\rho(L_1) + \rho(L_2) \geq \rho(L_1+L_2)$ ;
- Positiva omogeneità: per qualsiasi  $L \in \mathcal{M}$  e ogni  $\lambda > 0$  si ha  $\rho(\lambda L) = \lambda \rho(L)$  ;
- Monotonicità: per qualsiasi  $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$  tali che  $L_1 \geq L_2$  quasi sicuramente si ha  $\rho(L_1) \geq \rho(L_2)$ ;

L'assioma di invarianza prevede che sottraendo o aggiungendo una quantità deterministica  $l$  ad una posizione, si altera il requisito patrimoniale esattamente di quella quantità. L'assioma è fondamentale per l'interpretazione della misura di rischio come requisito patrimoniale data in precedenza: infatti, considerando una posizione  $L$  con  $\rho(L) > 0$  ed aggiungendo la quantità di capitale  $\rho(L)$  si ottiene la posizione accettabile  $L_M$  con  $\rho(L_M) = \rho(L - \rho(L)) = \rho(L) - \rho(L) = 0$

L'assioma di subadditività è sicuramente il più discusso, probabilmente anche perchè esclude il Var dalle misure di rischio coerenti, ma risulta, in ogni caso, un assioma ragionevole: tale principio riflette infatti l'idea che il rischio può essere ridotto mediante diversificazione. Qualora il regolatore utilizzasse misure di rischio non subaddittive per la determinazione del requisito patrimoniale, si avrebbe che un'istituzione finanziaria otterrebbe un incentivo scindendosi in più sotto imprese per ridurre il proprio requisito patrimoniale.

L'assioma di positiva omogeneità è una diretta conseguenza della subadditività: considerando infatti  $n$  rischi identici si ottiene  $\rho(nL) = \rho(L+L+\dots+L)$  e per la subadditività  $n\rho(L) \geq \rho(nL)$

Infine l'assioma di monotonicità appare ovvio da un punto di vista economico: posizioni che possono provocare perdite più elevate in ogni stato del mondo devono prevedere più elevati requisiti di capitale.

L'assioma di positiva omogeneità è stato criticato suggerendo che per grandi valori di  $\lambda$  dovrebbe valere  $\rho(\lambda L) > \lambda \rho(L)$  per penalizzare la concentrazione dei rischi e superare i problemi di liquidità. Tale disuguaglianza come mostrato in precedenza viola però anche l'assioma di subadditività. Questi aspetti hanno portato all'introduzione di alternative proprietà per le misure di rischio, definite misure di rischio convesse.

Le ipotesi di subadditività e positiva omogeneità vengono sostituite dal seguente assioma di convessità debole:  $\lambda\rho(L_1) + (1-\lambda)\rho(L_2) \geq \rho(\lambda L_1 + (1-\lambda)L_2)$ <sup>69</sup>.

<sup>68</sup> Vedi Quantitative Risk Management, McNeil, Frey, Embrechts, 2005



Una misura di rischio  $\rho(L)$  è definita convessa se è debolmente convessa, cioè se soddisfa gli assiomi di invarianza, monotonicità e convessità, e se  $\rho(0)=0$ .

## 3.2 Alcune misure di rischio

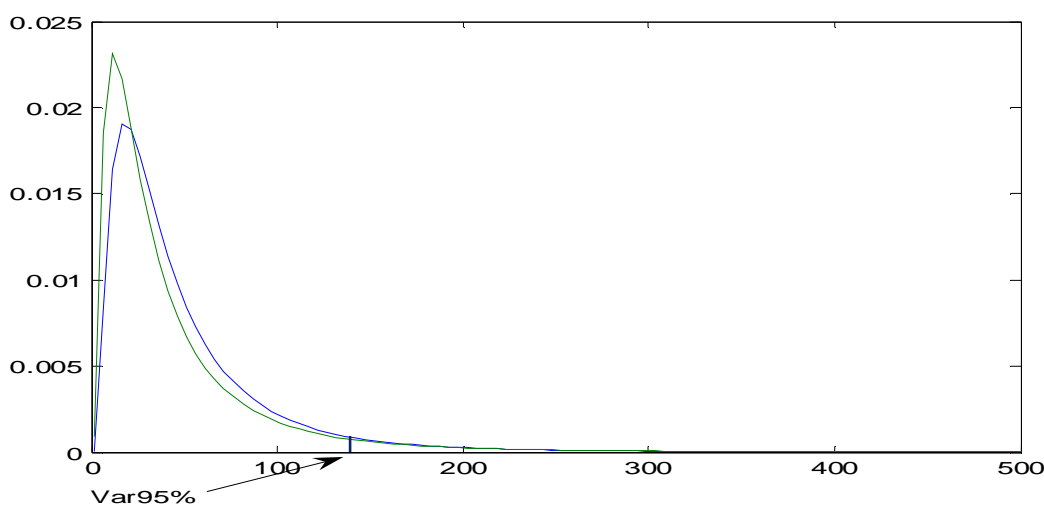
### 3.2.1 Value at Risk

Come anticipato in precedenza la più comune misura di rischio utilizzata negli ultimi anni è rappresentata dal Var. Considerando un portafoglio rischioso in un orizzonte temporale prefissato e assumendo che la perdita aggregata  $X$  abbia funzione di ripartizione  $F(x)$  al termine del periodo considerato, viene definito Value at Risk (Var) l'ammontare tale per cui la perdita di portafoglio sarà inferiore di tale ammontare con una probabilità  $\alpha$ :  $\text{Var}_\alpha(X) = \inf\{x | F(x) \geq \alpha\} = \inf\{x | P(X \geq x) < 1 - \alpha\}$ <sup>70</sup>.

Il Var può essere quindi definito come la massima perdita ad un livello di confidenza prefissato, ovvero il capitale necessario per far fronte alla massima perdita con probabilità  $\alpha$ . Analogamente accantonando un capitale pari al Var, la probabilità di rovina non potrà essere superiore di  $1-\alpha$ .

Nel caso di distribuzioni ellittiche il Var è semplicemente un multiplo della standard deviation (ad esempio per una distribuzione normale ad un livello di confidenza del 99% il Var è pari a 2.33 volte la standard deviation), si dimostra, infatti, che qualora  $X$  sia distribuito secondo una normale o una  $t$  di student con media  $\mu$  e scarto quadratico medio  $\sigma$  vale la seguente relazione:  $\text{Var}_\alpha = \mu + \sigma F^{-1}(\alpha)$ .

**Figura 27: Var al 95° percentile per due distribuzioni lognormali**



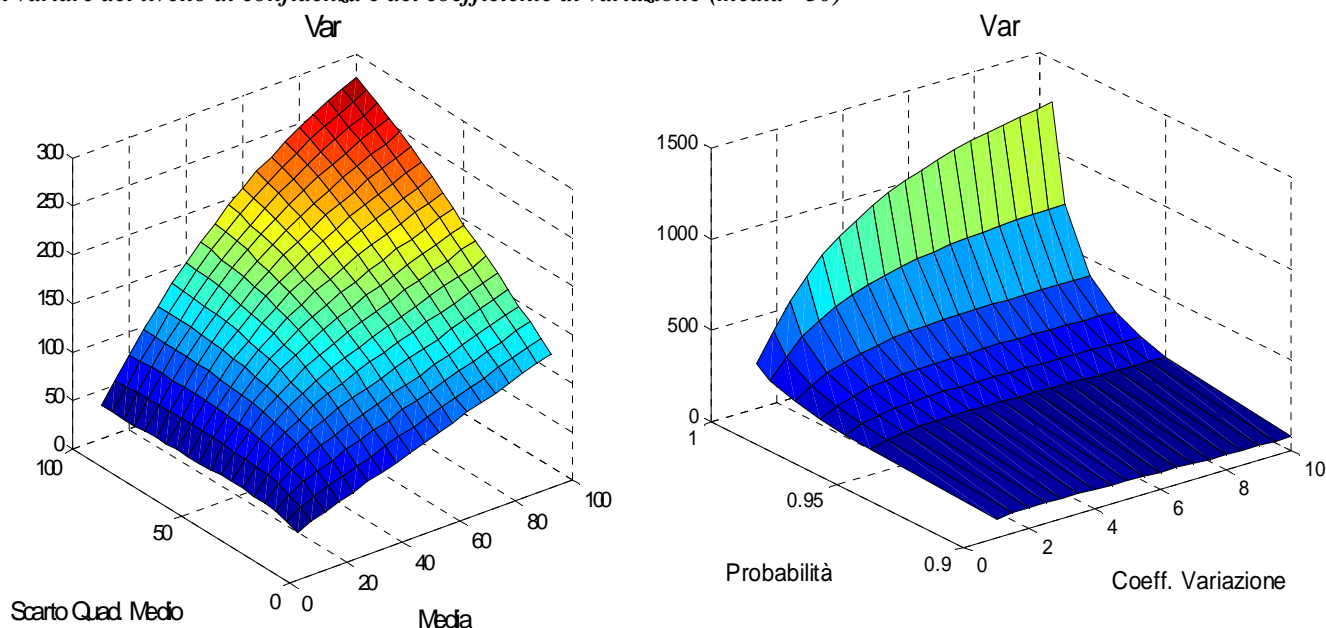
<sup>69</sup> Il concetto di misure di rischio convesse e debolmente convesse è stato introdotto da Follmer e Schied “Convex measures of risk and trading constraints”, 2002. Vedi Anche Pelessoni e Vicig, “Convex imprecise provisions for Risk Measurement”, 2001

<sup>70</sup> Per tale definizione vedi ad es. Wang, “A Risk Measure that goes beyond coherence” o Embrecht, McNeil, Frey, “Quantitative Risk Management”.

Nel caso di distribuzioni non ellittiche il Var presenta invece numerosi limiti. Le principali problematiche sono le seguenti:

- il Var potrebbe violare la dominanza di second'ordine e non sempre descrivere l'avversione al rischio in senso tradizionale<sup>71</sup>;
- il Var non considera l'entità degli eventi superiore al Var stesso trascurando la coda estrema della distribuzione;
- il Var viola la subaddittività e non risulta dunque una misura di rischio coerente<sup>72</sup>.

**Figura 28: Var al 95° percentile per una distribuzione lognormale al variare di media e scarto quadratico medio, ed al variare del livello di confidenza e del coefficiente di variazione (media =50)**



### 3.2.2 Expected Shortfall

La principale misura utilizzata generalmente nella pratica per la valutazione del requisito di capitale è rappresentato dal Var, ma tale misura, violando la subaddittività, può portare ad un'errata valutazione del requisito in presenza di aggregazione dei rischi.

Per superare la principale limitazione del Var, Artzner ed altri hanno proposto differenti misure di rischio che hanno assunto diverse denominazioni in letteratura, ma che coincidono sotto determinate condizioni.

Una prima misura introdotta da Artzner è rappresentata dalla Tail Conditional Expectations (TCE), che trascurando il fattore di sconto, è stata definita da Acerbi e Tasche nel modo seguente:

<sup>71</sup> Si veda in proposito: H. Rau-Bredow, "Value at Risk, Expected Shortfall and Marginal Risk Contribution", Maggio 2002

<sup>72</sup> Per alcuni esempi vedi "Quantitative risk management", Frey, McNeil, Embrechts e Tasche, "Expected Shortfall and beyond", dove si dimostra che il Var della somma di due variabili indipendenti distribuite secondo una Pareto nell'intervallo  $(-\infty, 1)$  è maggiore della somma dei Var.

$TCE^\alpha = E[X|X \geq \text{Var}^\alpha(X)]$ . Tale misura non soddisfa però nel caso di distribuzioni discrete la subadditività<sup>73</sup>.

Artzner propone così una seconda misura denominata Worst Conditional Expectation (WCE) definita come:  $WCE_\alpha = -\inf\{E[X|A:P(A) > \alpha]\}$ . Questa ulteriore misura risulta coerente al rischio ma risente della non trascurabile complessità derivante dalla dipendenza dallo spazio di probabilità  $P$  oltre che dalla variabile  $X$ .

Acerbi e Tasche riprendono infine il concetto di Expected Shortfall, comparando diverse definizioni proposte dalla letteratura e ottenendo la seguente definizione basata sulla  $\alpha$ -tail mean (TM), che soddisfa il requisito di subadditività anche in presenza di distribuzioni discrete o discontinue:

$$ES_\alpha(X) = -TM_\alpha(X) = (1-\alpha)^{-1} \{E[X|X \geq \text{Var}_\alpha(X)] + \text{Var}_\alpha(X)[1 - \alpha - P(X \geq \text{Var}_\alpha(X))]\}^{74}.$$

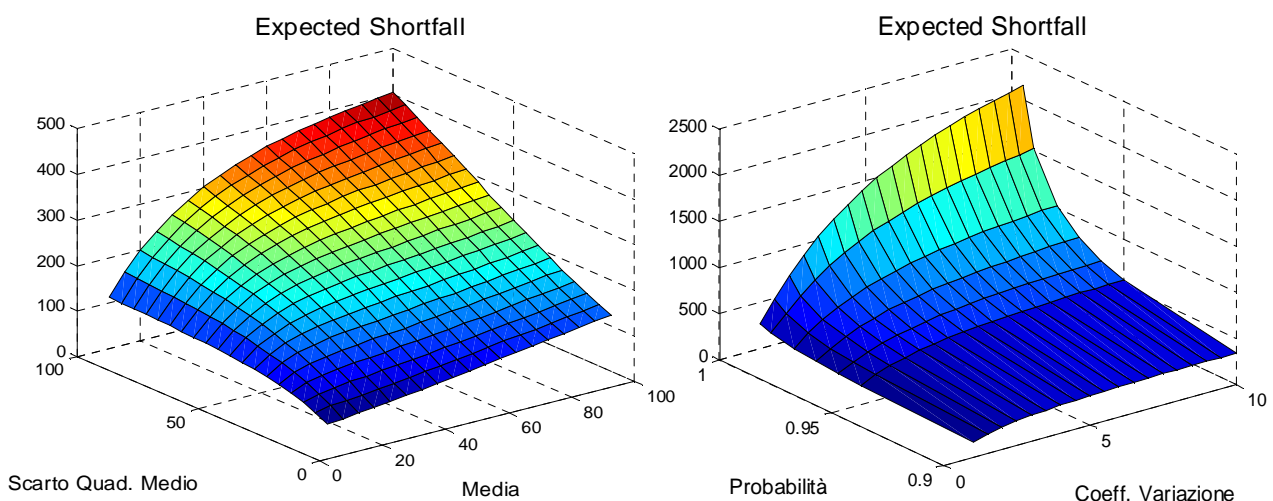
Facendo riferimento a distribuzioni continue, la formula dell'ES può essere sensibilmente

semplificata nel modo seguente:  $\frac{1}{1-\alpha} \int_\alpha^1 \text{Var}_u(X) du$ . In questo caso l'ES è pari alla media dei Var

per livelli di confidenza superiori ad alfa, può essere cioè definito come la media di tutte le perdite che si hanno con probabilità al massimo pari ad alfa.

ES dipende dunque unicamente dalla distribuzione di  $X$  e per costruzione varrà sempre:  $ES_\alpha(X) \geq \text{Var}_\alpha(X)$ .

**Figura 29: Expected Shortfall al 95° percentile per una distribuzione lognormale al variare di media e scarto quadratico medio, ed al variare del livello di confidenza e del coefficiente di variazione (media =50)**



<sup>73</sup> Per la dimostrazione vedi Daelben, "Coherent Risk Measures on general probability spaces" e Acerbi e Tasche, "On the Coherence of the Expected Shortfall"

<sup>74</sup> Una versione simile basata sulla media ponderata di Var e TCE è stata proposta sempre per distribuzioni discrete da Witch e Hardie.

La figura 29 mostra il requisito di capitale calcolato utilizzando l'ES con una distribuzione lognormale al variare dei parametri della distribuzione e del livello di probabilità. Come era lecito attendersi per livelli di probabilità più elevata un incremento di volatilità mostra un notevole variazione in termini di ES.

Vengono inoltre ottenute abbastanza facilmente in letteratura le equazioni semplificate dell'ES in presenza di distribuzioni ellittiche. Infatti per una distribuzione normale si ottiene la seguente espressione funzione dei parametri della normale e della densità della normale standard:

$$ES_{\alpha}(X) = \mu + \sigma \frac{\phi(\phi^{-1}(\alpha))}{1 - \alpha} \quad ^{75}.$$

Nel caso di distribuzioni continue senza discontinuità si dimostra inoltre che la CTE, denominata spesso in campo attuariale Tail Var ed identificato dalla seguente espressione

$$TailVar_{\alpha}(X) = Var_{\alpha}(X) + \frac{\Pr(X > Var_{\alpha}(X))}{1 - \alpha} E[X - Var_{\alpha}(X) | X > Var_{\alpha}(X)] \quad ^{76}, \quad \text{coincide con}$$

l'Expected Shortfall definito in precedenza<sup>77</sup>.

### 3.2.3 Misure di rischio distorte

Le differenti tipologie di misure di rischio introdotte nel paragrafo precedente si basano sull'analisi del comportamento della variabile X quando assume valori maggiori del Var. Lo stesso TailVar infatti, sebbene soddisfi l'assioma di coerenza, riflette unicamente i sinistri di entità superiore al Var causando una possibile mancanza di incentivo in caso di mitigazione dei sinistri inferiori al Var. Wang sostiene dunque che un'adeguata misura di rischio debba andare oltre l'assioma di coerenza e sulla base di questa considerazione introduce una famiglia di misure di rischio coerenti basate su funzioni di distorsione.

Si dimostra<sup>78</sup> infatti che data una qualsiasi funzione  $g : [0,1] \rightarrow [0,1]$  crescente e tale che  $g(0)=0$  e  $g(1)=1$ , allora la trasformata  $F^*(X)=g(F(X))$  definisce una distribuzione di probabilità distorta e g viene definita funzione di distorsione.

Viene così facilmente definita una famiglia di misure di rischio distorte nel modo seguente:

<sup>75</sup> Per la dimostrazione e per l'analoga espressione per la distribuzione t di student vedi Embrechts, McNeil, Frey, "Quantitative Risk Management", pag.47

<sup>76</sup> Vedi ad esempio "A Risk Measure that goes beyond coherence", S. Wang

<sup>77</sup> Per la dimostrazione della coincidenza tra CTE e ES per distribuzioni continue vedi: Acerbi e Tasche, "On the coherence of expected shortfall". Viene inoltre dimostrato che, in generale, per un livello di confidenza alfa e per una qualsiasi variabile X, vale la seguente relazione:  $ES_{\alpha}(X) \geq WCE_{\alpha}(X) \geq TCE_{\alpha}(X)$

<sup>78</sup> Vedi Wang, "A risk measure that goes beyond coherence"

$$p(X) = E^*(X) = - \int_{-\infty}^0 g(F(x))dx + \int_0^{\infty} [1 - g(F(x))]dx, \text{ tale misura risulta inoltre coerente nel caso in cui } g \text{ è una funzione continua}^{79}.$$

Oltre alla revisione delle misure classiche<sup>80</sup>, come Var e TailVar, riscritte in funzione delle funzioni di distorsione, sono state proposte alcune diverse misure innovative basate su diverse funzioni g.

Fra queste occorre segnalare le funzioni di distorsione basate sulla famiglia Beta proposte da Wirch e Hardy<sup>81</sup> e la Wang Transform.

Quest'ultima, basata sulla definizione della seguente funzione di distorsione  $g: g(u) = \phi[\phi^{-1}(u) - \lambda]$  con  $\phi$  ripartizione della normale standard, permette di ottenere una nuova misura di rischio coerente.

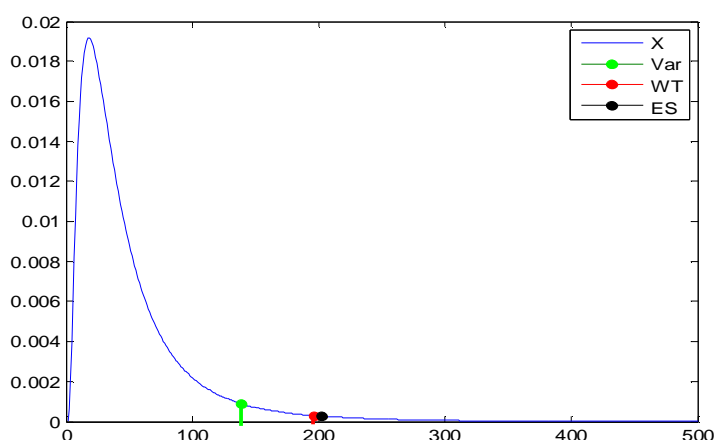
Data una variabile X con funzione di ripartizione F, è possibile infatti definire la nuova misura di rischio basata sulla Wang Transform nel modo seguente:

- per un livello di confidenza prefissato  $\alpha$  calcolare  $\lambda = \phi^{-1}(\alpha)$
- applicare la trasformata di Wang:  $F^*(X) = \phi[\phi^{-1}(F(X)) - \lambda]$
- calcolare il valore atteso  $p(X) = E^*(X)$  utilizzando la distribuzione distorta.

Nel caso la X abbia una distribuzione normale, la misura WT assume valore identico al Var, viceversa nel caso la distribuzione della X non sia normale, WT può corrispondere ad un percentile più elevato o più basso di  $\alpha$ .

Si dimostra inoltre che nel caso di una distribuzione lognormale  $\ln(X) = N(\mu, \sigma^2)$  la misura WT viene calcolata semplicemente nel modo seguente:  $WT(\alpha) = \exp(\mu + \lambda\sigma + \sigma^2/2)$  con  $\lambda = \phi^{-1}(\alpha)$ . In questo caso, come si può osservare dalla figura, l'utilizzo della misura WT prevede un requisito di capitale superiore al Var e molto simile a quello previsto dall'ES.

**Figura 30: Confronto tra tre misure di rischio (Var, WT e ES) ad un livello di alfa pari a 0,95 per una variabile X distribuita secondo una LogNormale con coefficiente di variabilità pari 1 e media pari a 50.**



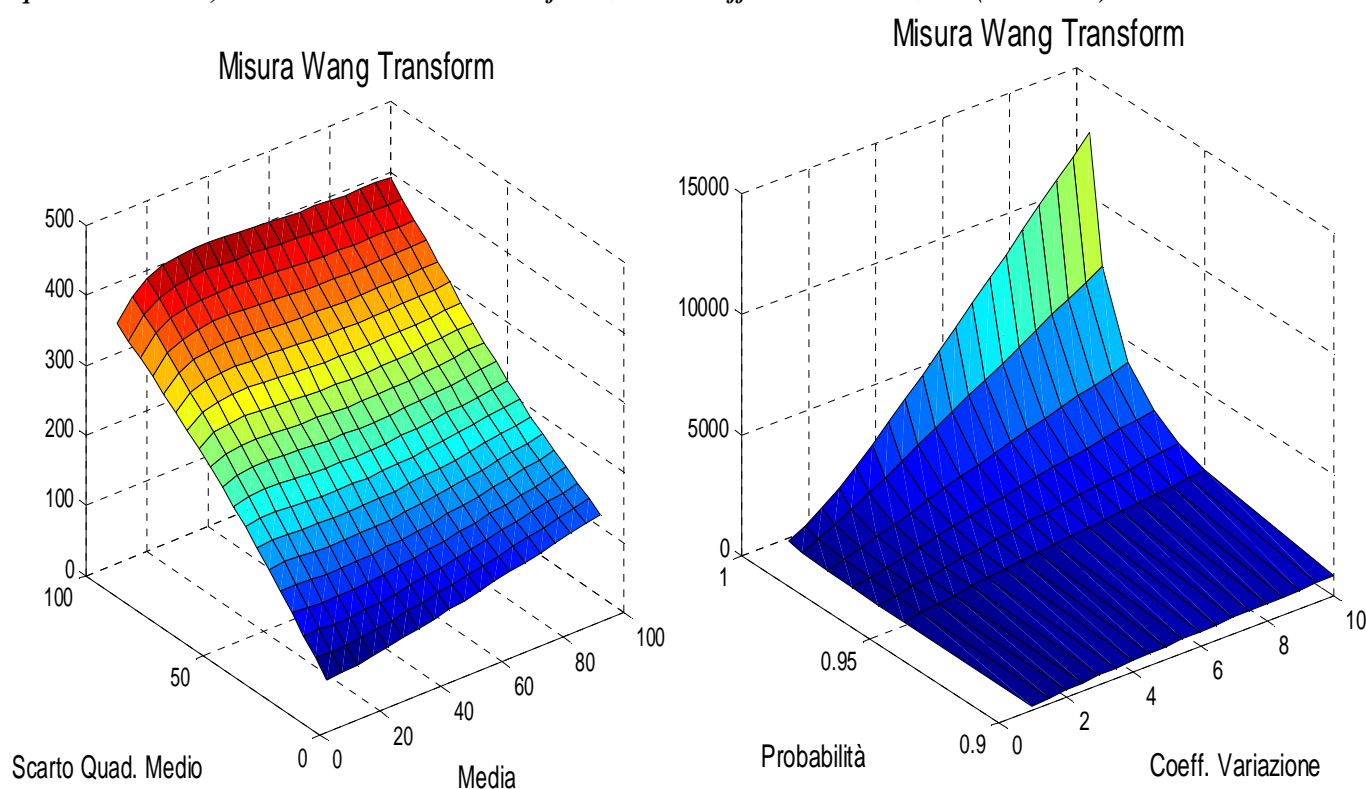
<sup>79</sup> Si veda in proposito: Wang, Young, Panjer, "Axiomatic characterization of insurance prices"

<sup>80</sup> Si veda in proposito: Wang, "A risk measure that goes beyond coherence"

<sup>81</sup> Vedi ad esempio Wirch e Hardy "Distorsion risk measures: coherence and stochastic dominance"

I grafici seguenti mostrano inoltre la sensibilità della misura WT al variare dei primi due cumulanti della LogNormale ed al variare del livello di confidenza alfa prefissato. Si può osservare come la misura WT risulta particolarmente sensibile alla variazione dello scarto quadratico medio della distribuzione in esame. Infatti se per i livelli più bassi di variabilità la WT mostra un requisito di capitale molto simile a quello ottenuto col Var (con media e scarto quadratico pari a 20 si ha 27,81 per il Var contro i 39,33 per la WT e 40,5 per l'ES), per i livelli di variabilità più elevati si ottiene un requisito di capitale addirittura doppio rispetto a quello ottenuto utilizzando il Var (con media pari a 50 e scarto quadratico pari a 100 si ha 180,19 per il Var, 332,87 per l'ES e 402,92 per la WT). Inoltre, non solo la WT cresce in modo significativo al crescere del coefficiente di variabilità, ma raggiunge livelli elevatissimi quando le variabilità elevate coincidono con livelli di confidenza particolarmente estremi (0,99 e successivi).

**Figura 31: Misura Wang Transform al 95° percentile per una distribuzione lognormale al variare di media e scarto quadratico medio, ed al variare del livello di confidenza e del coefficiente di variazione (media =50)**



### 3.2.4 Misure al rischio spettrali (Spectral Risk Measures)

Uno dei più recenti ed interessanti sviluppi nel campo delle misure di rischio è rappresentato dall'introduzione delle misure spettrali. La caratteristica distintiva di questo tipo di misure è rappresentata dal collegamento esplicito tra questa tipologia di misure di rischio e la funzione di avversione al rischio.

L'idea base è fondata sull'estensione del concetto che sta alla base dell'Expected Shortfall, infatti come quest'ultimo può essere interpretato come la media dei (1-alfa)% peggiori sinistri o perdite di portafoglio, analogamente si può supporre l'esistenza di altre misure di rischio coerenti calcolate attraverso la media ponderata dei peggiori sinistri. E allo stesso tempo si dimostra agevolmente che una combinazione convessa di misure di rischio coerenti è essa stessa una misura coerente.

Definendo così una classe di misure di rischio  $M_\phi$ , pari alla media ponderata dei quantili della distribuzione e fissando il livello di confidenza  $\alpha$  si ottiene la seguente misura di rischio spettrale:

$$M_\phi(X) = \int_0^1 \phi(\alpha) q_\alpha d\alpha \quad \text{dove } q_\alpha \text{ rappresenta il quantile della distribuzione ad un livello } \alpha \text{ e } \phi$$

prende il nome di "risk spectrum".

Si può osservare che la CTE o ES e il Var sono anch'essi delle particolari tipologie di misure spettrali, il CTE infatti non è altro che la media dei quantili con livello di confidenza superiore o pari ad  $\alpha$  tutti con pesi identici, mentre il Var può essere interpretato come un caso degenerare in quanto attribuisce peso pari a 1 al quantile  $q_\alpha$  e peso pari a 0 a tutti gli altri quantili.

La funzione  $\phi$  viene generalmente interpretata come funzione di avversione al rischio in quanto ogni investitore razionale potrebbe ipotizzare un diverso profilo della funzione.

In realtà si dimostra<sup>82</sup> che per mantenere la coerenza della misura al rischio il peso deve essere scelto opportunamente in modo da soddisfare i seguenti vincoli:

- non negatività:  $\phi(p)$  può assumere valori maggiori o uguali a zero,
- normalizzazione: la somma delle probabilità pesate  $\phi(p)$  deve essere pari a 1,
- pesi crescenti: se una probabilità  $\alpha_2$  è maggiore della probabilità  $\alpha_1$  allora  $\phi(\alpha_2)$  deve assumere un valore maggiore o uguale a  $\phi(\alpha_1)$ .

Le prime due condizioni appaiono ovvie, ma la terza assume particolare importanza. Tale condizione riflette infatti il concetto di avversione al rischio imponendo che sinistri di entità più rilevante devono essere associati a probabilità pesate non inferiori ai sinistri di entità inferiore.

Il tasso di crescita sarà strettamente correlato al grado di avversione: se un decisore ha una debole avversione al rischio, allora i pesi cresceranno lentamente al crescere dei sinistri, viceversa maggiore sarà l'avversione al rischio e maggiore sarà la crescita dei pesi al crescere dell'ammontare dei sinistri.

Di conseguenza secondo questo ragionamento l'utilizzo della CTE porta ad ipotizzare una situazione di neutralità al rischio nei confronti dei sinistri superiori al Var.

---

<sup>82</sup> Si veda in proposito: Acerbi, "Risk Aversion and Coherent Risk Measures: a spectral representation theorem"

Il Var infine viola la proprietà di incremento dei pesi in quanto attribuisce peso 0 a quantili con probabilità superiore ad  $\alpha$ .

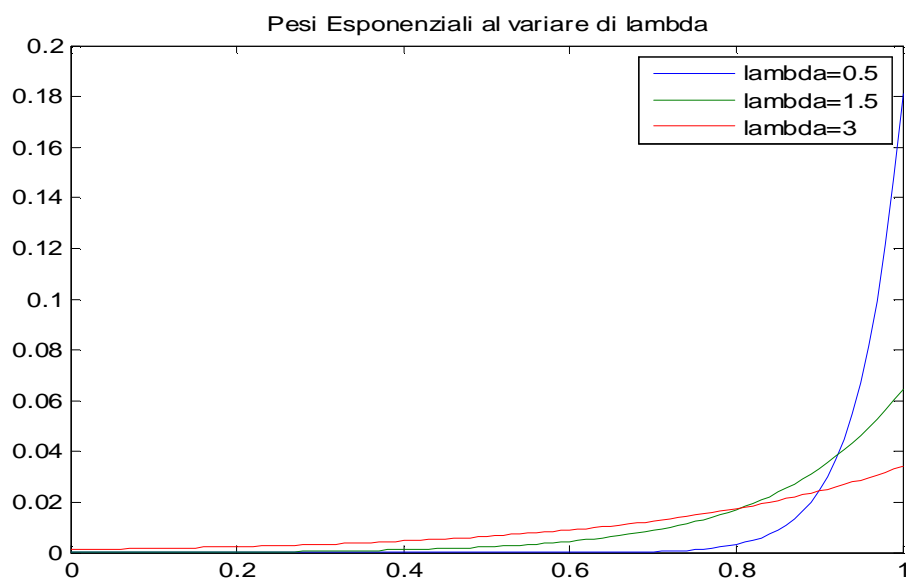
Per ottenere una misura di rischio spettrale occorre dunque formulare un'ipotesi in merito alla forma della funzione di avversione al rischio. Tale scelta risulta chiaramente soggettiva in quanto dipende dall'avversione al rischio dell'investitore ma una semplice formulazione può essere rappresentata dalla seguente funzione esponenziale di avversione al rischio:

$$\phi(\alpha) = \frac{\exp[-(1-p)/\lambda]}{\lambda(1 - \exp^{-1/\lambda})} \quad \text{dove il parametro positivo } \lambda \text{ riflette il grado di avversione al rischio:}$$

minore è il valore di  $\lambda$  e maggiore è il grado di avversione.

Il grafico successivo mostra il comportamento al variare di  $\lambda$  dei pesi calcolati utilizzando la funzione esponenziale e normalizzati per soddisfare i requisiti di coerenza. Tale figura conferma la crescita più rapida dei pesi al diminuire di  $\lambda$ , ovvero al crescere dell'avversione al rischio.

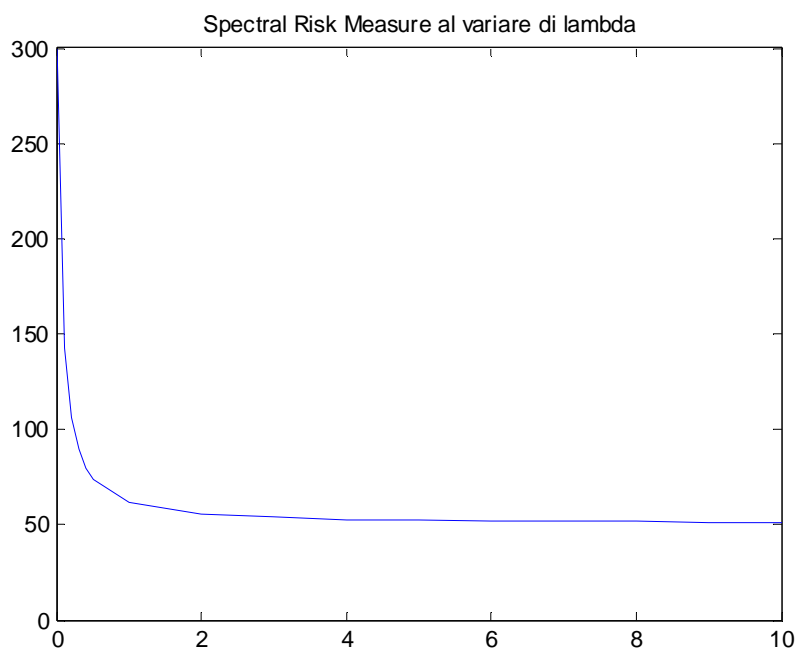
**Figura 32: Andamento dei pesi, calcolati con una funzione di avversione al rischio esponenziale, al variare di lambda**



La misura di rischio, dipendendo dai pesi scelti, può risultare dunque notevolmente influenzata dall'avversione al rischio dell'individuo. Ad esempio, considerando una variabile  $X$  distribuita secondo una Lognormale (figura 33) e i pesi di tipo esponenziale descritti in precedenza, si ottiene una misura di rischio Spettrale inferiore al  $\text{Var}_{95\%}$  solo per individui particolarmente avversi ( $\lambda$  inferiore a 0,1), viceversa considerando valori di  $\lambda$  più elevati si ottiene un requisito di capitale decisamente inferiore al  $\text{Var}_{95\%}$  (ad esempio per la Lognormale scelta, con  $\lambda=10$  si ottiene un requisito di 51,10 pari circa al risultato ottenuto col  $\text{Var}_{65\%}$ )



**Figura 33:** *Requisito di capitale ottenuto utilizzando la Spectral Risk Measure, calcolata utilizzando pesi esponenziali normalizzati con parametro  $\lambda$  variabile e una variabile  $X$  distribuita secondo una LogNormale con media pari a 50 e coefficiente di variabilità pari a 1.*



## Conclusioni

Negli ultimi anni la letteratura relativa alle misure di rischio è apparsa molto florida, dall'articolo di Artzner e altri infatti, con l'introduzione del concetto di coerenza e la dimostrazione della violazione della subadditività da parte del Var, ci si è indirizzati alla ricerca di misure di rischio che da un lato soddisfacessero i requisiti di coerenza descritti in precedenza, dall'altro lato fossero in grado di meglio considerare l'intero comportamento delle distribuzioni delle variabili esaminate.

L'introduzione di misure condizionate al Var (dal Tail Var all'Expected Shortfall), molte delle quali apparse con nomi diversi ma coincidenti in caso di distribuzioni continue senza discontinuità, vanno lette proprio nel senso della ricerca di coerenza e di analisi anche della coda della distribuzione.

Mentre i principali organismi di sorveglianza si stanno muovendo verso la scelta di una di queste misure tradizionali (Var o Tail Var principalmente) per individuare l'idoneo requisito di capitale, la letteratura attuariale e finanziaria ha invece allargato la schiera delle misure di rischio attraverso i concetti di distorsione e di misure spettrali.

Mentre le prime si muovono sulla scia del Tail Var e dell'Expected Shortfall e hanno il principale obiettivo di considerare anche i sinistri inferiori al Var, le seconde, creando un importante legame tra misura di rischio e funzione di avversione, introducono un importante e delicato concetto di soggettività nelle valutazioni. Utilizzando una misura spettrale infatti, due individui con identico

portafoglio ed identica funzione pesi, potrebbero ottenere un diverso requisito di capitale funzione della propria avversione al rischio. Questa innovazione, sicuramente in linea con il concetto soggettivo di rischio, potrebbe invece rivelarsi particolarmente difficoltosa e problematica in sede di valutazione e di comparazione dei rischi salvo che i regolatori anticipassero a priori la scelta delle decisioni soggettive.

## **4 Un modello per la valutazione dell'impatto della correlazione sul capitale a rischio**

### ***Introduzione***

Alla luce dei recenti sviluppi in materia di solvibilità, appare sempre più necessaria un'accurata modellizzazione del capitale a rischio sulla base dell'effettiva rischiosità dell'impresa.

In particolare assume importanza una corretta ed adeguata valutazione dei rischi strettamente connessi all'attività esercitata dall'impresa. In questo senso, sia le recenti proposte del Solvency II, sia gli studi alternativi proposti dal Fopi e dall'Fsa, individuano nell'underwriting risk una delle principali fonti di rischio che gravano su un'impresa di assicurazione. Nel seguito dunque s'intenderà compiere un'analisi dettagliata di questa tipologia di rischio, soffermandosi nel dettaglio sulla valutazione del premium risk.

Uno degli aspetti innovativi, evidenziati dai più recenti studi in ambito Solvibilità, è rappresentato dall'introduzione di metodologie che considerino l'impatto delle eventuali correlazioni, derivanti dalla gestione di più rami assicurativi, sull'ipotetico requisito di capitale.

In realtà le prime formule di calcolo del capitale del requisito Scr proposte dall'attuale QIS2 lasciano, come già sottolineato nel primo capitolo, ancora molto spazio all'interpretazione definendo solo dei livelli generici di correlazione.

Tale formula, privilegiando l'uso della correlazione lineare rispetto al possibile utilizzo delle copule prospettato dall'International Actuarial Association, rientra dunque nell'ottica della definizione di una standard formula che ricerchi il giusto compromesso tra l'individuazione di un requisito più correlato all'effettiva rischiosità dell'impresa e un criterio di calcolo non eccessivamente elaborato dal punto di vista tecnico.

Nel presente capitolo si intende così, attraverso diverse metodologie, analizzare l'effetto di diverse strutture di dipendenze sull'ammontare del costo totale dei sinistri sostenuto dall'impresa e sull'eventuale requisito di capitale.

Verrà dunque compiuta un'analisi dettagliata dell'impatto sul costo aggregato di diverse strutture di dipendenza, presenti sul numero o sul costo dei sinistri dei rami assicurativi esercitati, descritte, come vedremo, sia attraverso l'utilizzo della classica correlazione lineare, sia attraverso diverse funzioni copula.

Tali risultati saranno poi estesi allo studio dell'andamento della riserva di rischio, giungendo così alla definizione di un requisito di capitale ottenuto con diverse misure di rischio e per diversi livelli di probabilità.

In particolare il modello di base è ottenuto attraverso l'estensione a più rami assicurativi, eventualmente correlati, dei modelli simulativi utilizzati per la valutazione del Risk Based Capital da Savelli e Rytgaard<sup>83</sup>. L'estensione è compiuta attraverso l'introduzione di più rami assicurativi, con una struttura di dipendenza definita separatamente sul numero e sul costo del sinistro, attraverso diverse funzioni copule e differenti livelli di correlazione.

I risultati ottenuti con il modello simulativo saranno poi confrontati con analoghe stime, effettuate utilizzando l'algoritmo proposto da Glenn Meyers e la formula di calcolo del Scr illustrata nel QIS2.

#### 4.1 Il modello base

Per descrivere il comportamento della riserva rischio di un assicuratore contro i danni, specializzato in più linee di business, è stata utilizzata la seguente relazione, nota in Teoria del Rischio, che definisce la riserva di rischio stocastica alla fine dell'anno  $t$ :

$$\tilde{U}_t = (1 + j)\tilde{U}_{t-1} + [B_t - \tilde{X}_t - E_t](1 + j)^{1/2}$$

dove:

$B_t$  indica i premi di tariffa al tempo  $t$  relativi a tutte le linee di business esercitate,

$\tilde{X}_t$  indica il costo aggregato dei sinistri al tempo  $t$  relativi a tutte le linee di business esercitate,

$E_t$  indica le spese sostenute per la gestione e l'acquisizione dei contratti al tempo  $t$ ,

$j$  indica il tasso di rendimento finanziario.

E' possibile estendere tale relazione sia introducendo modelli stocastici per la descrizione del comportamento del tasso di rendimento finanziario, sia strutture per descrivere l'impatto di un eventuale ricorso a una o più forme di copertura riassicurativa o l'effetto derivante dalla presenza di rischi catastrofici<sup>84</sup>.

Nel seguito ci si concentrerà comunque sulla valutazione del premium risk al lordo della riassicurazione, tralasciando sia la modellizzazione del rischio finanziario sia l'effetto dei rischi catastrofici.

<sup>83</sup> Si veda in proposito: Savelli & Rytgaard, "Risk-Based Capital Requirements for Property and Liability Insurers according to different Reinsurance Strategies and the Effect on Profitability", XXXV Astin Colloquium, Bergen 2004

<sup>84</sup> Estensioni in merito sono state proposte in letteratura senza considerare la dipendenza tra i rami. Vedi ad esempio Savelli & Rytgaard [2004], per l'analisi dell'effetto dei rischi catastrofici e della riassicurazione e Savelli & Ballotta [2005] per la modellizzazione della componente finanziaria.

Per ogni linea di business si ipotizza, dunque, sia che l'ammontare dei premi di tariffa cresca sulla base del tasso di inflazione  $i$  e di un tasso di crescita di portafoglio  $g$ , sia che tali premi siano composti da un premio al rischio, da un caricamento di sicurezza costante  $\lambda$  espresso in percentuale del premio di rischio e da un caricamento per spese  $c$  funzione del premio di tariffa stesso sulla base delle seguenti relazioni:

$$- B_t = B_{t-1}(1+i)(1+g)$$

$$- B_t = P_t + \lambda P_t + c B_t$$

Il costo aggregato relativo ad ogni singola linea sarà ottenuto attraverso l'approccio collettivo, utilizzando le ipotesi classiche di indipendenza, tra numero e costo dei sinistri, e di indipendenza e identica distribuzione dei costi dei singoli sinistri:

$$\tilde{X}_t = \sum_{i=1}^{\tilde{k}_t} \tilde{Z}_{i,t}$$

Il costo aggregato è ottenuto attraverso un processo di Poisson composto, dove il numero dei sinistri  $\tilde{K}_t$  è distribuito secondo una Poisson con parametro  $n_t = n_0(1+g)^t$  con presenza di una variabile di disturbo  $q$ , distribuita secondo una Gamma con parametri uguali, e il costo dei sinistri è distribuito nel tempo  $t$  secondo delle distribuzioni LogNormali riscalate, con momenti rispetto all'origine crescenti nel tempo sulla base del tasso di inflazione:

$$a_{j, \tilde{Z}_{i,t}} = E(\tilde{Z}_{i,t}^j) = (1+i)^{jt} E(\tilde{Z}_{i,0}^j) .$$

Il costo aggregato sostenuto dall'impresa, relativo a tutte le linee di business esercitate, dipenderà dalle ipotesi di dipendenza introdotte nella stima del costo aggregato relativo alle singole linee. Nel caso di indipendenza sia sul numero sia sui costi dei sinistri, si ottengono risultati noti in teoria del rischio e i seguenti momenti<sup>85</sup> per il costo aggregato in presenza di due linee di business:

$$E(\tilde{X}_t^{Tot}) = E(\tilde{X}_t^1) + E(\tilde{X}_t^2) = n_{N_1,t} a_{1,Z_1,t} + n_{N_2,t} a_{1,Z_2,t}$$

$$\sigma(\tilde{X}_t^{Tot}) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{X}_t^1) + \sigma^2(\tilde{X}_t^2)} =$$

$$\left[ n_{N_1,t} a_{2,Z_1,t} + n_{N_1,t}^2 a_{1,Z_1,t}^2 \sigma_{q_1}^2 + n_{N_2,t} a_{2,Z_2,t} + n_{N_2,t}^2 a_{1,Z_2,t}^2 \sigma_{q_2}^2 \right]^{1/2}$$

<sup>85</sup> Per la dimostrazione dei momenti esatti in presenza di un'unica linea di business vedi ad esempio: Savelli, "Solvency and Traditional Reinsurance for Non-Life Insurers"

$$\gamma(\tilde{X}_t^{Tot}) = \frac{a_3(\tilde{X}_t^1) + a_3(\tilde{X}_t^2)}{\sigma(\tilde{X}_t^{Tot})^3} = \frac{\left[ n_{N_1,t} a_{3,Z_1,t} + 3n_{N_1,t}^2 a_{1,Z_1,t} a_{2,Z_1,t} \sigma_{q_1}^2 + n_{N_1,t}^3 a_{1,Z_1,t}^3 \gamma_{q_1} \sigma_{q_1}^3 \right.}{\left[ n_{N_1,t} a_{2,Z_1,t} + n_{N_1,t}^2 a_{1,Z_1,t}^2 \sigma_{q_1}^2 + n_{N_2,t} a_{2,Z_2,t} + n_{N_2,t}^2 a_{1,Z_2,t}^2 \sigma_{q_2}^2 + n_{N_2,t}^3 a_{1,Z_2,t}^3 \gamma_{q_2} \sigma_{q_2}^3 \right]^{3/2}}$$

Più complessi risultano, invece, i momenti del costo aggregato in presenza di diverse strutture di dipendenza sul numero e sul costo dei sinistri. In particolare nel seguito s'intenderà testare separatamente le diverse ipotesi:

- dipendenza tra il numero dei sinistri relativo alle due linee;
- dipendenza tra il costo dei sinistri relativo alle due linee;
- dipendenza sia tra il numero dei sinistri relativo alle due linee, sia tra il costo dei sinistri relativo alle due linee.

Nel caso  $N_1$  e  $N_2$  siano linearmente dipendenti con coefficiente di correlazione  $\rho_N$ , e le variabili  $Z_1$  e  $Z_2$  siano indipendenti, allora lo scarto quadratico medio<sup>86</sup> della variabile  $X^{Tot}$  sarà il seguente:

$$\sigma(\tilde{X}_t^{Tot}) = \sqrt{\sigma^2(\tilde{X}_t^1) + \sigma^2(\tilde{X}_t^2) + 2Cov(\tilde{X}_t^1, \tilde{X}_t^2)} = \sqrt{\sigma^2(\tilde{X}_t^1) + \sigma^2(\tilde{X}_t^2) + 2Cov(N_t^1, N_t^2)E(Z_1^1)E(Z_2^2)} = \left[ n_{N_1,t} a_{2,Z_1,t} + n_{N_1,t}^2 a_{1,Z_1,t}^2 \sigma_{q_1}^2 + n_{N_2,t} a_{2,Z_2,t} + n_{N_2,t}^2 a_{1,Z_2,t}^2 \sigma_{q_2}^2 + \rho_N (n_{N_1,t} + n_{N_1,t}^2 \sigma_{q_1}^2)^{1/2} (n_{N_2,t} + n_{N_2,t}^2 \sigma_{q_2}^2)^{1/2} a_{1,Z_1,t} a_{2,Z_1,t} \right]^{1/2}$$

## 4.2 Analisi metodologica (la stima dei parametri)

Il modello di simulazione della riserva di rischio è stato applicato ad un'impresa che esercita due differenti linee di business, ipotizzando diverse strutture di dipendenza tra i due rami esercitati. Non sono state invece riviste le ipotesi iniziali, che stanno alla base dell'approccio collettivo, ovvero

<sup>86</sup> La Covarianza di  $X$  può essere infatti scritta nel modo seguente:

$$Cov(X_1 X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

ed utilizzando la media a due stadi è possibile calcolare la media del prodotto nel modo seguente:

$$E(X_1 X_2) = E_{N_1, N_2} [E(X_1 X_2 | N_1, N_2)] = E_{N_1, N_2} \left[ E \left( \sum_{i=1}^{N_1} Z_{1,i} \sum_{j=1}^{N_2} Z_{2,j} | N_1, N_2 \right) \right] = E_{N_1, N_2} \left[ E \left( \sum_{i=1}^{N_1} Z_{1,i} \sum_{j=1}^{N_2} Z_{2,j} | N_1, N_2 \right) \right]$$

e valendo l'indipendenza dei costi dei singoli sinistri si ricava:

$$E(X_1 X_2) = E[N_1 N_2] E(Z_1 Z_2)$$

l'indipendenza tra numero e costo dei sinistri e l'indipendenza e l'identica distribuzione dei costi dei sinistri relativi ad una linea di business.

In particolare sono state analizzate le seguenti situazioni alternative verificandone l'impatto sia sul costo aggregato sia sull'eventuale requisito di capitale:

- indipendenza tra i costi aggregati relativi alle due linee di business;
- dipendenza tra i numeri dei sinistri relativi alle due linee e indipendenza tra i costi dei singoli sinistri;
- dipendenza tra i costi dei sinistri relativi alle due linee e indipendenza tra i numeri dei sinistri;
- dipendenza sia tra i costi dei sinistri sia tra i numeri dei sinistri relativi alle due linee.

Le dipendenze sono state simulate attraverso differenti funzioni copula introducendo, di volta in volta, diverse strutture rispettivamente sul numero e sul costo dei sinistri.

Le analisi sono state fatte considerando un'impresa di piccole dimensioni operante nel mercato assicurativo Danni.

In particolare è stata considerata un'impresa che commercializza contratti appartenenti al ramo decimo (Responsabilità civile Autoveicoli) e contratti di Responsabilità Civile Medica (appartenenti al ramo tredicesimo, Responsabilità Civile Generale).

Nella tabella seguente sono illustrati i principali parametri relativi alle due linee di business in esame:

**Figura 34: Parametri stimati o ipotizzati relativi alle due linee di business utilizzati per l'implementazione del modello.**

	Linea di business	
	RC Auto	RC Medica
<b>Raccolta Premi:</b>		
Premi di rischio	10.707.630,00	7.180.236,00
Premi di tariffa	14.587.294,68	10.659.376,94
<b>Parametri:</b>		
Numero medio di sinistri (n)	2410	252
Varianza del fattore di disturbo ( $\sigma^2_q$ )	0,025470	0,085742
Costo Medio del singolo sinistro (m)	4443	28493
Coeff. Variabilità singolo sinistro ( $c_z$ )	4	6
Tasso di inflazione (i)	2,50%	
Tasso di crescita del portafoglio (g)	1,83%	6,15%
Tasso di rendimento finanziario (j)	3%	
Caricamento per spese (c)	22,93%	27,92%
Caricamento di sicurezza ( $\lambda$ )	5%	7%
Tipo di Coefficiente	Rho	Tau
Correlazione Numero di Sinistri	0,68847	0,48344
Correlazione Costo Singolo Sinistro	-0,52517	-0,35200

Occorre, in ogni caso, fare alcune considerazioni in merito alla stima dei parametri e alle ipotesi utilizzate. Per quanto riguarda il ramo RcAuto il costo medio dei sinistri ( $m$ ), la frequenza sinistri e il numero medio dei sinistri relativi all'intero mercato sono stati stimati sulla base dei dati pubblicati dall'Ania e relativi alla Banca Dati RcAuto per il periodo 1998-2004. Il numero medio di sinistri ( $n$ ) è stato ottenuto ipotizzando di considerare una compagnia con 25000 assicurati, in possesso quindi di una quota di mercato di circa lo 0,1%<sup>87</sup>. Tale quota di mercato, apparentemente molto contenuta, risponde comunque alla realtà di un numero non trascurabile di imprese operanti nel mercato italiano. Considerando infatti i dati Ania relativi alla raccolta premi del 2005, 28 imprese su 73 hanno una quota di mercato compresa tra lo 0,1% e l'1% e solo 16 imprese hanno una quota di mercato superiore al 2%<sup>88</sup>.

Per quanto riguarda il ramo RcMedica il costo medio dei sinistri ( $m$ ) e il numero medio dei sinistri relativi all'intero mercato sono stati stimati sulla base della serie storica (per gli anni 1994-2004) pubblicata dall'Ania nel marzo 2005.

Il numero medio dei sinistri ( $n$ ) è stato ottenuto considerando una compagnia con una quota di mercato pari all'1%. Anche in questo caso occorre sottolineare che solo 20 compagnie su 95 hanno una quota di mercato superiore all'1%

Per entrambi i rami è stato inoltre introdotto un fattore di disturbo per tener conto della variabilità del settore in oggetto. Per ogni linea di business la varianza del fattore di disturbo  $q$  è stata ottenuta sulla base della seguente relazione:

$$\sigma_{n_j}^2 = n_j + n_j^2 \sigma_{q_j}^2 \quad \text{con } j = 1, 2.$$

Sono stati inoltre stimati i tassi di crescita del portafoglio ( $p_j$ ) sulla base della media dei premi totali per ramo degli ultimi 5 anni. In particolare il tasso di crescita  $g_j$  è stato ottenuto sulla base della seguente relazione  $(1 + p_j) = (1 + g_j)(1 + i)$  con  $j = 1, 2$ , ipotizzando un tasso di inflazione costante del 2,5%.

E' stato inoltre ipotizzato un caricamento per spese coincidente con le spese effettivamente sostenute dall'impresa e il dato è stato ricavato dal rapporto medio Spese/Premi degli ultimi 5 anni relativo al mercato RcAuto (22,93%) e al generico mercato Danni (27,92%).

Sono stati infine ipotizzati i valori relativi al coefficiente di variazione del costo del singolo sinistro, il tasso di rendimento finanziario e i caricamenti di sicurezza.

Per la stima della correlazione tra i due rami sono state considerate separatamente le serie storiche relative al numero e al costo dei sinistri. Il coefficiente di correlazione ed il relativo Tau di Kendall

<sup>87</sup> Sono stati considerati infatti 25.000 assicurati rispetto ad un numero di veicoli assicurati pari a 24.867.525 per l'anno 2004. Si veda in proposito Banca Dati Auto 2004.

<sup>88</sup> Si veda in proposito "Graduatoria premi per singola impresa relativa al ramo RcAuto per il 2005", Ania



è stato così stimato separatamente sulla base della serie storica del numero di sinistri, depurato del tasso di crescita degli assicurati e della serie storica del costo medio del singolo sinistro, depurato del tasso di inflazione ipotizzato.

### 4.3 Il numero dei sinistri

L'applicazione del modello è stata inizialmente compiuta verificandone l'impatto sull'ammontare del numero dei sinistri relativi alle due linee oggetto nei casi di indipendenza e di correlazione, quest'ultima modellizzata introducendo diverse strutture di dipendenza, ottenute tramite diverse copule, ma con identico valore del tau di Kendall (0,48 circa, per il valore esatto vedi figura 34).

Si può innanzitutto osservare che l'applicazione del metodo simulativo garantisce una buona approssimazione ai momenti esatti:

**Figura 35: Momenti Esatti e Simulati (500.000 simulazioni) relativi al numero dei sinistri osservati sui contratti RcAuto**

Numero dei sinistri (Linea Rc Auto)						
	Esatti			Simulati		
T	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1,0	2410,0	387,74	0,3192	2410,4	387,71	0,3208
2,0	2454,1	394,78	0,3192	2454,0	394,64	0,3192
3,0	2499,0	401,94	0,3192	2498,7	401,58	0,3177
4,0	2544,7	409,24	0,3192	2545,4	409,47	0,3160
5,0	2591,3	416,67	0,3192	2591,3	416,71	0,3171

I principali momenti stimati, ottenuti applicando il modello ad entrambe le linee di business in ipotesi di indipendenza e compiendo 500.000 simulazioni, evidenziano un ottimo adattamento della media. Differenze maggiori, ma comunque limitate, si ottengono dal confronto tra scarto quadratico medio esatto e simulato, in ogni caso i valori simulati replicano molto fedelmente l'andamento nel tempo del valore esatto.

Seppur con scostamenti sempre molto limitati, l'andamento decrescente nel tempo dell'indice di asimmetria non è sempre replicato perfettamente dai valori simulati.

**Figura 36: Momenti Esatti e Simulati (500.000 simulazioni) relativi al numero dei sinistri osservati sui contratti di responsabilità Civile Medica**

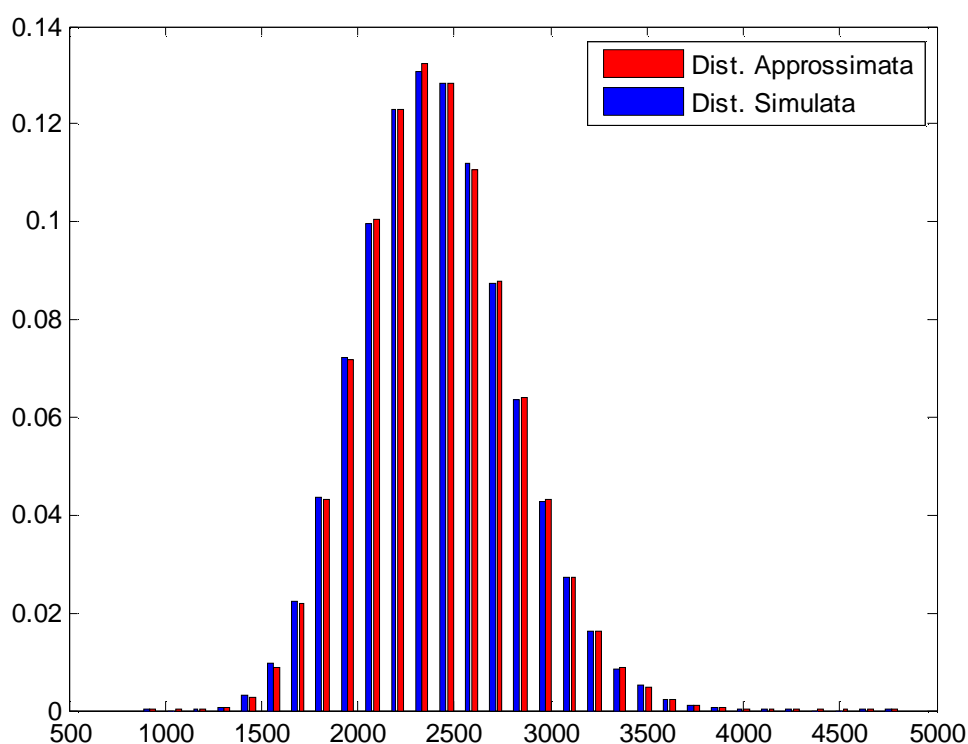
Numero dei sinistri (Linea Rc Medica)						
	Esatti			Simulati		
T	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1	252,0	75,48	0,5858	252,0	75,48	0,5909
2	267,5	80,02	0,5858	267,5	79,93	0,5837
3	283,9	84,84	0,5858	283,9	84,90	0,5895
4	301,4	89,95	0,5857	301,5	89,92	0,5848
5	319,9	95,38	0,5857	319,9	95,44	0,5878

Occorre infine sottolineare che maggiore è la dimensione del portafoglio analizzato e più alta è la capacità di adattamento del modello.

Si può, infatti, sottolineare che la linea RcMedica, presentando un numero medio e una variabilità dei sinistri notevolmente più contenuti rispetto alla RcAuto, pur evidenziando un adattamento quasi perfetto anche della deviazione standard simulata (vedi figura 36), mostra in realtà scostamenti medi in valore assoluto più elevati tra valori esatti e valori simulati<sup>89</sup>.

Tali risultati dipendono infine dal numero di simulazioni effettuate: infatti un incremento del numero di simulazioni provoca un adattamento sempre migliore dei momenti simulati ai momenti esatti. Nello stesso tempo un incremento delle simulazioni provoca un notevole aumento dei tempi di elaborazione: occorre dunque, di volta in volta, ottenere un giusto compromesso tra risultati ottenuti e tempi di elaborazione necessari.

**Figura 37: Numero dei sinistri osservati sui contratti RcAuto nel corso del primo anno stimati utilizzando una Distribuzione Binomiale Negativa e il modello di simulazione**



Si può osservare infine come il modello di simulazione restituisca una variabile numero di sinistri distribuita in modo quasi identico alla distribuzione effettivamente ipotizzata inizialmente. In questo caso il numero di simulazioni scelto garantisce buoni risultati in termini di adattamento.

<sup>89</sup> La linea RcMedica mostra infatti uno scostamento medio, dei valori simulati rispetto ai momenti esatti, pari allo 0,0183% sulla media, a 0,058% sulla standard deviation e a 0,57% sull'asimmetria. La linea RcAuto evidenzia invece uno scostamento pari a 0,012% sulla media, a 0,039% sulla standard deviation e di 0,533% sull'asimmetria.

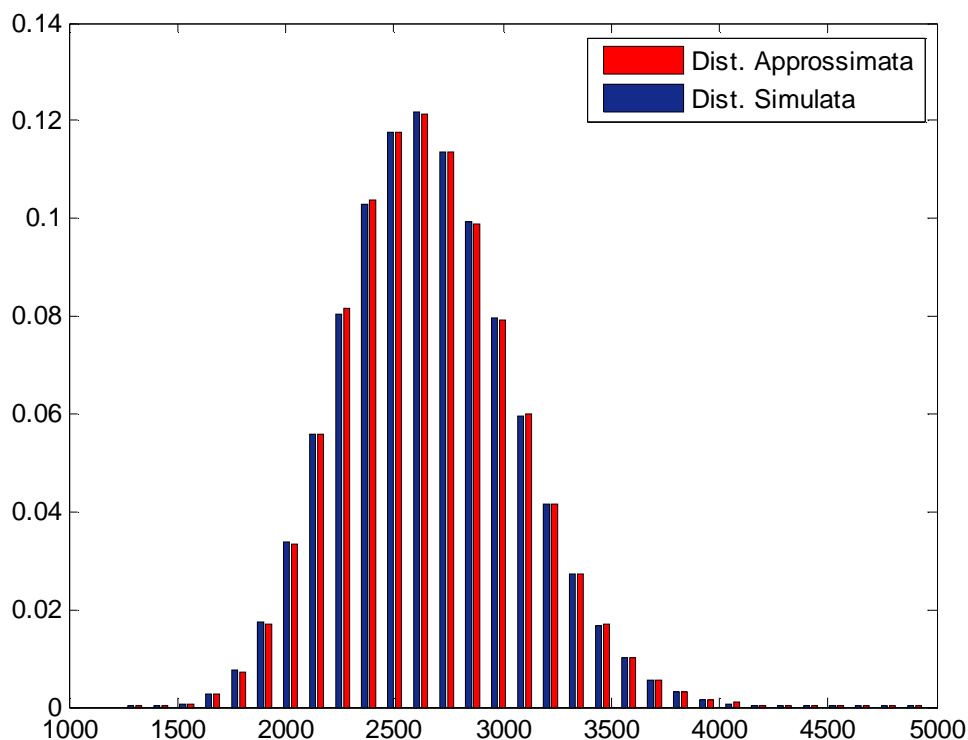
Passando all'analisi del numero aggregato dei sinistri osservato sull'intero portafoglio esaminato, ottenuto mediante la somma dei contratti originati dalle due linee di business, si osserva anche in questo caso, in ipotesi di indipendenza tra le due linee, un buon adattamento sia dei momenti (figura 38) sia della distribuzione di probabilità simulata (figura 39).

E' inoltre interessante osservare che la gestione di più rami assicurativi fra loro indipendenti, pur non avendo alcun impatto benefico in termini di varianza totale, crea una distribuzione aggregata meno asimmetrica rispetto alle singole distribuzioni<sup>90</sup>.

**Figura 38: Confronto tra momenti esatti e momenti simulati relativi al numero totale dei sinistri in caso di indipendenza tra le due linee (500.000 simulazioni)**

Numero sinistri Totale (Indipendenza tra le due linee)						
T	Esatti			Simulati		
	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1	2.662,0	395,02	0,3060	2662,5	394,86	0,3047
2	2.721,6	402,80	0,3051	2721,5	402,64	0,3045
3	2.783,0	410,80	0,3042	2782,7	410,46	0,3033
4	2.846,2	419,01	0,3032	2846,9	419,28	0,2977
5	2.911,3	427,45	0,3022	2911,2	427,78	0,3011

**Figura 39: Numero totale dei sinistri osservati nel corso del primo anno (ipotesi di indipendenza tra le due linee), stimati utilizzando una Distribuzione Binomiale Negativa e il modello di simulazione**



<sup>90</sup> Per la dimostrazione matematica basta osservare la formula dell'indice di asimmetria in presenza di due rami assicurativi indipendenti (vedi paragrafo 4.2)

Introducendo una struttura di dipendenza sul numero dei sinistri attraverso l'utilizzo di una copula Gaussiana, il modello garantisce nuovamente un buon adattamento in termini di media e deviazione standard (vedi figura 40). L'introduzione della struttura di dipendenza, pur mantenendo pressoché invariati i momenti dei numeri dei sinistri relativi alle due linee rispetto al caso d'indipendenza, provoca, com'è lecito attendersi, un incremento della variabilità del numero sinistri totale per effetto della correlazione positiva tra i rami.

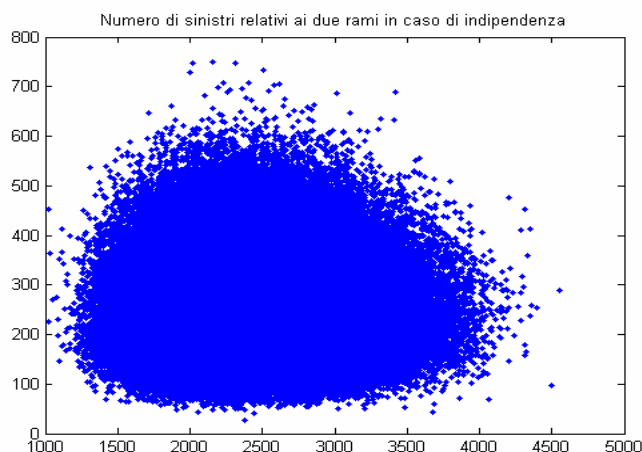
Anche l'indice di asimmetria aumenta, seppure in misura molto contenuta, rispetto alla situazione di indipendenza.

**Figura 40: Momenti del numero totale dei sinistri in caso di dipendenza tra i due rami, modellizzata attraverso una copula Gaussiana con coefficiente di correlazione pari a 0,68847 (100.000 simulazioni)**

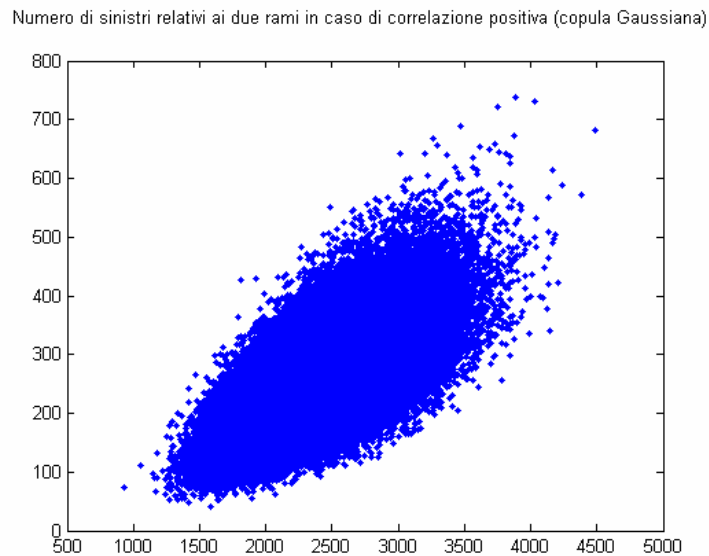
Numero sinistri Totale (Dipendenza tra le due linee: copula gaussiana)					
	Esatti		Simulati		
T	Media	Dev. Standard	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1	2662,0	443,1	2660,7	443,4	0,32915
2	2721,6	453,6	2721,0	452,8	0,34325
3	2783,0	464,4	2783,9	464,9	0,34218
4	2846,2	475,7	2847,7	476,1	0,33801
5	2911,3	487,3	2911,9	486,6	0,34067

Il confronto tra le figure 41 e 42 evidenzia chiaramente il differente comportamento del numero dei sinistri relativi alle due linee in caso di correlazione positiva ed in caso di indipendenza. Si può, infatti, osservare che l'introduzione delle copula Gaussiana, pur non alterando, rispetto al caso di indipendenza, i momenti del numero dei sinistri generati dalle singole linee di business, permette di simulare numeri di sinistri strettamente correlati.

**Figura 41: Numero sinistri, relativi alle due linee esaminate, simulati in caso di indipendenza (100.000 simulazioni)**



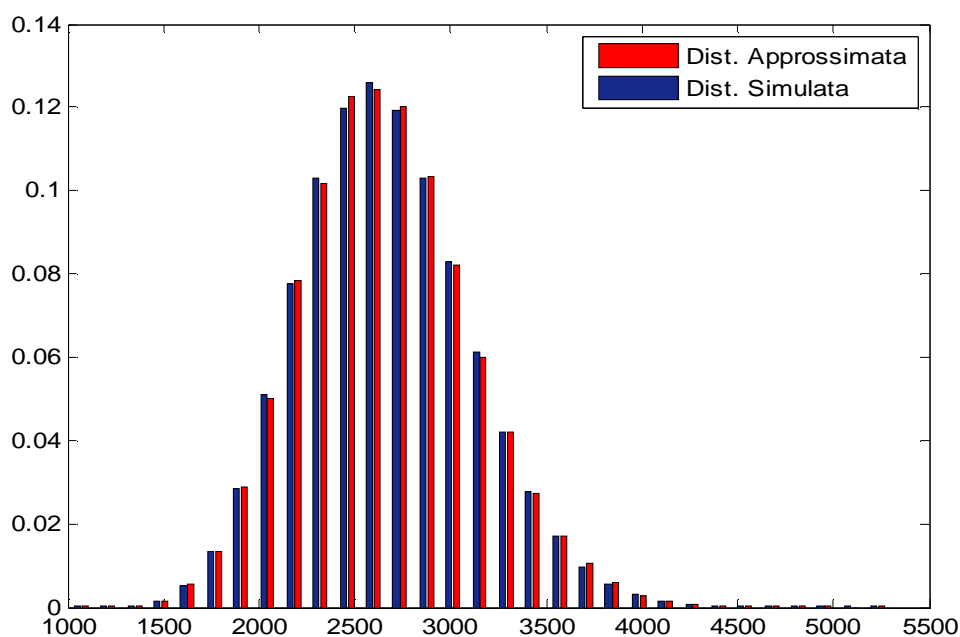
**Figura 42: Numero di sinistri simulati, relativi ai due rami esercitati, nel caso di correlazione positiva modellizzata attraverso una copula Gaussiana con correlazione pari a 0,68847 (100.000 simulazioni)**



Anche il confronto grafico (figura 43), tra la distribuzione simulata relativa al numero totale dei sinistri e la distribuzione ottenuta mediante l'utilizzo di una binomiale negativa, con parametri stimati considerando i momenti esatti in presenza di correlazione, evidenzia il buon adattamento del modello simulativo anche nel caso di rami positivamente correlati.

Infine, anche graficamente, si può osservare la maggiore variabilità della distribuzione in presenza di correlazione positiva rispetto al caso di indipendenza analizzato in precedenza (vedi figura 39).

**Figura 43: Numero totale dei sinistri osservati nel corso del primo anno, stimati utilizzando una Distribuzione Binomiale Negativa e il modello di simulazione**



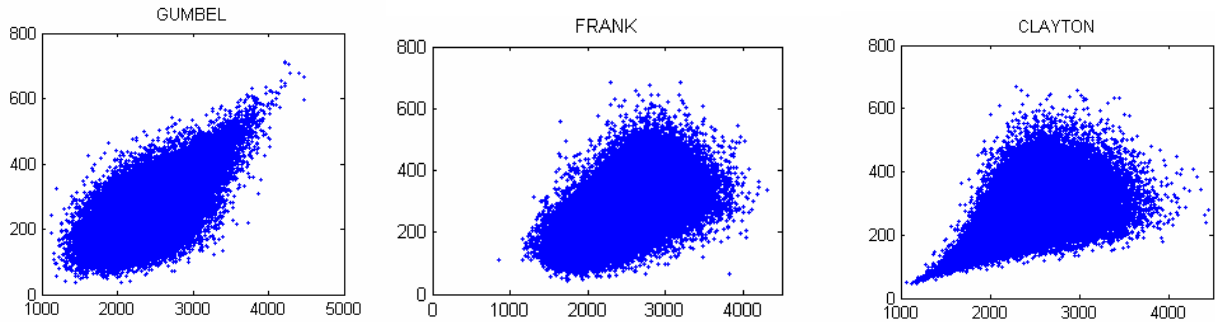
Pur mantenendo inalterato il livello di dipendenza attraverso l'individuazione di un unico valore del Tau di Kendall, può essere interessante verificare l'effetto di eventuali strutture di dipendenza alternative sul numero dei sinistri.

In particolare il modello simulativo è stato implementato introducendo le più comuni funzioni copula in grado di descrivere strutture di dipendenza non lineari.

I grafici, relativi al comportamento del numero dei sinistri in presenza di differenti strutture di dipendenza, evidenziano in modo molto evidente la diversa struttura introdotta dalle diverse copule per uno stesso livello di Tau.

In particolare si osserva la maggiore correlazione sulla coda sinistra della distribuzione della copula Clayton e la correlazione molto accentuata sulla coda destra introdotta dalla copula Gumbel, risultato in linea con la definizione di copula utile per modellizzare eventi estremi.

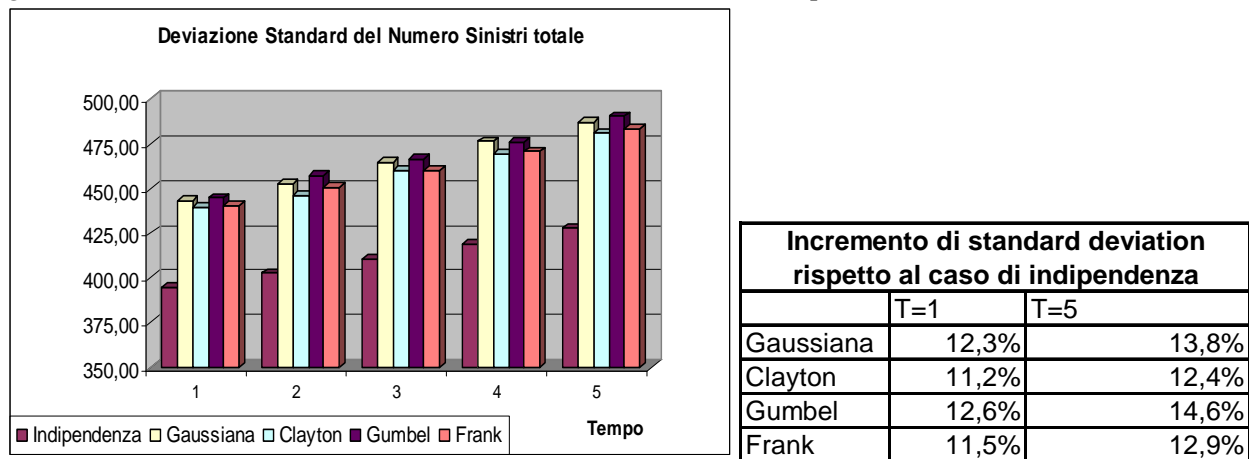
**Figura 44: Numero dei sinistri relativi alle due linee per diverse strutture di dipendenza (rispettivamente copula Gumbel, Frank, Clayton) per un livello di Tau pari a 0,48344 (100.000 simulazioni)**



E' interessante osservare come le diverse strutture incidano in modo differente sulla variabilità e sull'asimmetria del numero totale dei sinistri.

In particolare tutte le copule provocano un evidente incremento di variabilità rispetto al caso di indipendenza. Tra loro le diverse copule mostrano invece differenze molto contenute in termini scarto quadratico medio (vedi figura 45).

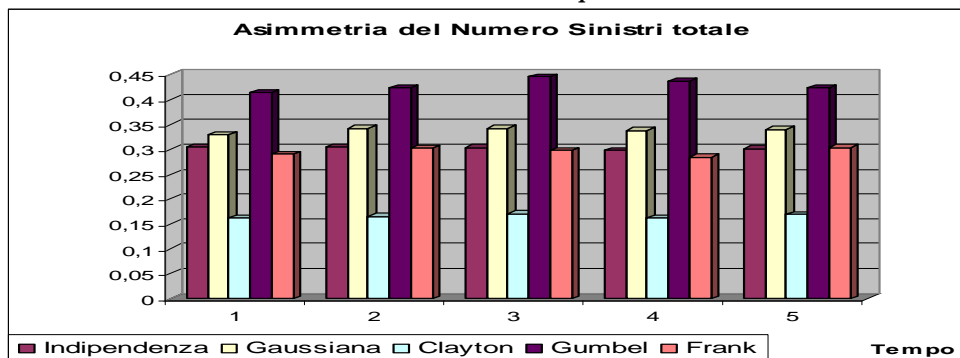
**Figura 45: Deviazione standard del numero totale dei sinistri nelle diverse ipotesi adottate**



E' inoltre interessante rilevare che la copula Gumbel, oltre ad assumere la maggiore standard deviation dopo un anno, provoca il maggiore incremento in termini di variabilità tra il primo e il quinto anno.

L'indice di asimmetria del numero totale di sinistri (figura 46) evidenzia invece differenze più marcate a seconda dell'ipotesi adottata. In particolare si osserva un incremento notevole dell'asimmetria, nel caso la dipendenza sia descritta attraverso la copula Gumbel (dipendenza sulla coda destra più marcata), e una riduzione significativa dell'asimmetria con la copula Clayton, in quanto la correlazione, seppur positiva, è concentrata sulla coda sinistra.

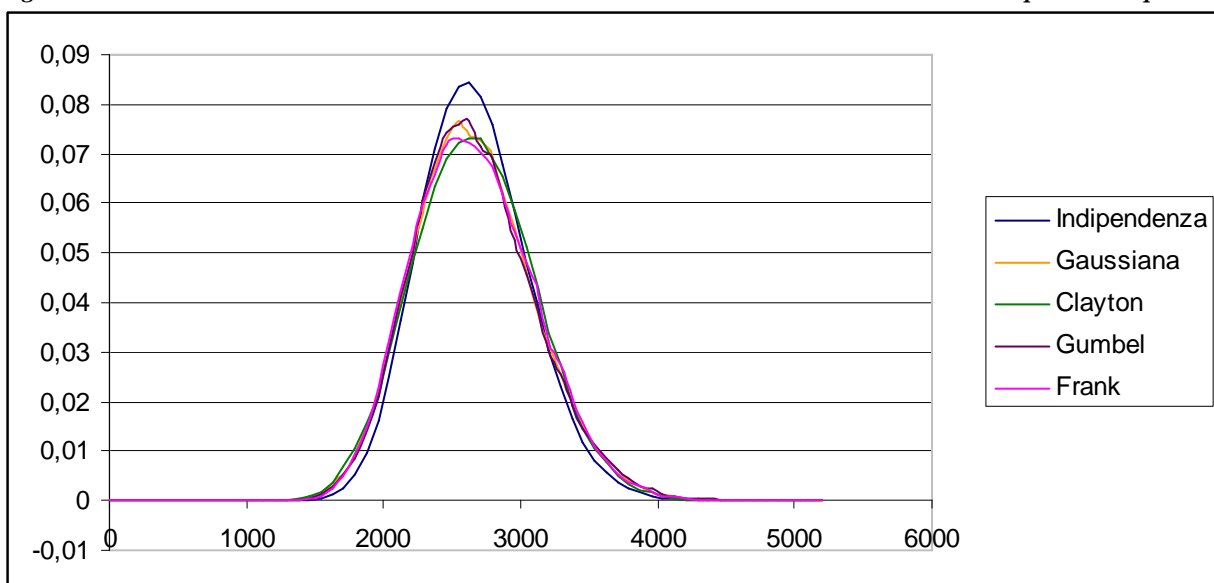
**Figura 46: Asimmetria del numero totale dei sinistri nelle diverse ipotesi adottate**



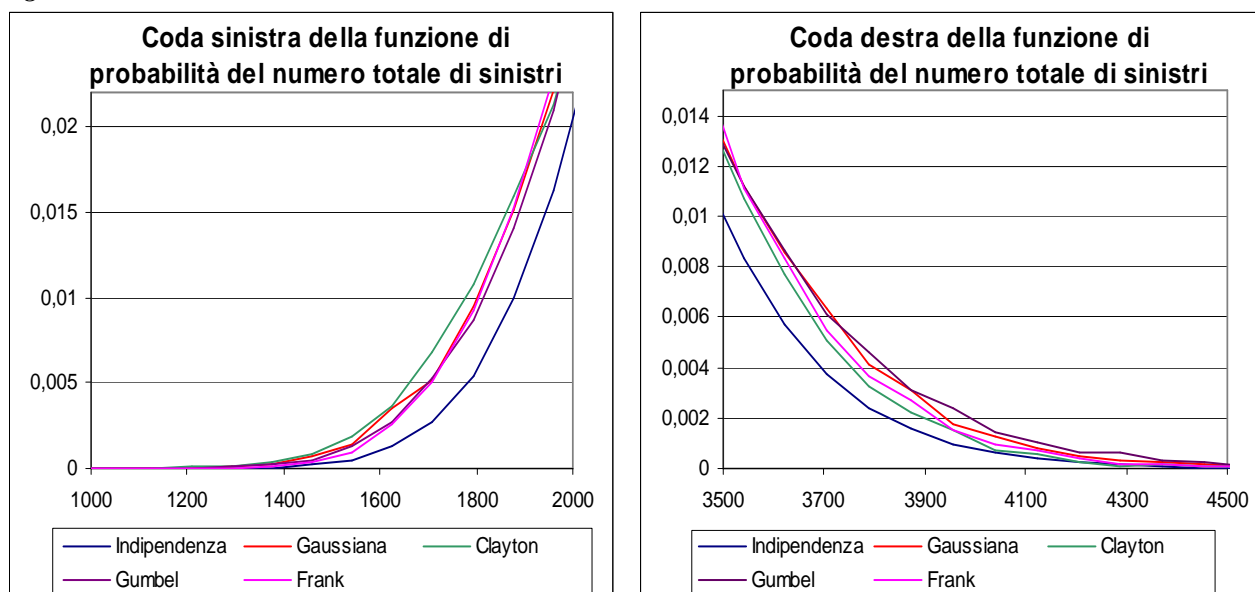
Anche il confronto delle distribuzioni simulate ottenute attraverso le diverse ipotesi di dipendenza evidenzia le differenti caratteristiche delle copule utilizzate.

Si osserva infatti nuovamente la maggiore variabilità introdotta dalla presenza di correlazione (figura 47), la maggiore probabilità sulla coda destra della distribuzione introdotta dalla Copula Gumbel e il comportamento opposto evidenziato dalla Copula Clayton (figura 48).

**Figura 47: Andamento della distribuzione simulata del numero totale dei sinistri con diverse ipotesi di dipendenza**



**Figura 48: Andamento delle due code della distribuzione simulata del numero totale dei sinistri**



## 4.4 Il costo aggregato dei sinistri

Nell'ottica dell'individuazione di un idoneo requisito di capitale, risulta particolarmente interessante l'analisi dell'impatto sul costo aggregato di eventuali dipendenze sul numero e sul costo dei sinistri.

Ipotizzando inizialmente l'assenza di dipendenze sul costo dei sinistri si procederà all'esame dell'effetto sul costo aggregato delle diverse strutture esaminate nel paragrafo precedente.

Il modello restituisce momenti simulati in linea con quelli esatti anche per il costo aggregato dei sinistri. Sia per la linea RcAuto, sia per quella RcMedica si osserva che la media e la deviazione standard simulata ben approssimano i valori esatti. L'andamento non perfetto dell'asimmetria simulata, già osservato nell'analisi del numero dei sinistri, si riflette in misura più marcata anche sul costo aggregato dei sinistri. Si osservano, soprattutto per la linea RcMedica, più asimmetria, in alcuni casi scostamenti abbastanza significativi in termini di asimmetria.

**Figura 49: Momenti Esatti e Simulati (500.000 simulazioni) relativi al costo aggregato dei sinistri osservati sui contratti RcAuto**

Costo Aggregato dei Sinistri (Linea Rc Auto)						
	Esatti			Simulati		
T	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1	10.707.630	1931046	0,4573	10.709.952	1933033	0,4545
2	11.176.169	2011612	0,4532	11.176.212	2009852	0,4886
3	11.665.210	2095597	0,4491	11.666.436	2097799	0,4355
4	12.175.651	2183148	0,4452	12.176.955	2180826	0,4385
5	12.708.427	2274419	0,4414	12.707.074	2276497	0,4542



**Figura 50: Momenti Esatti e Simulati (500.000 simulazioni) relativi al costo aggregato dei sinistri osservati sui contratti della linea RcMedica**

<b>Costo Aggregato dei Sinistri (Linea Rc Medica)</b>						
	Esatti			Simulati		
T	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1	7.180.236	3462687	7,5797	7.180.457	3441521	6,4053
2	7.812.366	3697989	7,1485	7.810.498	3658476	5,8613
3	8.500.147	3950943	6,7363	8.512.455	4079145	7,2139
4	9.248.479	4222998	6,3425	9.240.284	4181805	5,4207
5	10.062.692	4515734	5,9671	10.061.869	4497803	5,2985

In caso di indipendenza tra le due linee, i momenti del costo aggregato restituiscono risultati ben noti: la media cresce in funzione della crescita del portafoglio, analogamente cresce anche la varianza, essendo la somma delle varianze delle due linee, l'asimmetria infine può essere interpretata come una "sorta" di media ponderata delle due asimmetrie<sup>91</sup>.

**Figura 51: Momenti Esatti e Simulati (500.000 simulazioni) relativi al costo aggregato dei sinistri osservato sull'intero portafoglio in caso di indipendenza tra le due linee**

<b>Costo Aggregato Totale (Indipendenza tra le due linee)</b>						
	Esatti			Simulati		
T	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Media	Dev. Standard	Asimmetria
1	17.887.866	3964737	5,1023	17.890.409	3950028	5,9730
2	18.988.535	4209716	4,8951	18.986.710	4171316	5,6790
3	20.165.358	4472301	4,6906	20.178.891	4587740	6,4830
4	21.424.130	4753930	4,4891	21.417.239	4712847	4,4195
5	22.771.119	5056168	4,2911	22.768.943	5038666	3,7625

E' interessante infine analizzare l'andamento del coefficiente di variabilità della variabile X, interpretabile anche come variabilità del loss ratio puro<sup>92</sup>.

Tale coefficiente (vedi figura 52) mostra nel tempo un andamento decrescente per le singole linee di business. Si dimostra<sup>93</sup> che, per valori di n tendenti all'infinito, tende allo scarto quadratico medio della variabile fattore di disturbo o a zero se il numero di sinistri è distribuito secondo una Poisson semplice.

<sup>91</sup> Non è propriamente una media ponderata in quanto è definita nel modo seguente:

$$\gamma_X = \frac{\gamma_{X_1} (Var_{X_1})^{1,5} + \gamma_{X_2} (Var_{X_2})^{1,5}}{(Var_{X_1} + Var_{X_2})^{1,5}}$$

<sup>92</sup> Tale coefficiente non è altro infatti che:  $Cv_X = \frac{\sigma_X}{E_X} = \sigma\left(\frac{X}{P}\right)$

<sup>93</sup> Infatti:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma_X}{E_X} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{n\alpha_{2,z} + n^2 a_{1,z}^2 \sigma_q^2}{n^2 a_{1,z}^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{\frac{\alpha_{2,z}}{n a_{1,z}^2} + \sigma_q^2} \right) = \sigma_q$

La gestione di più linee di business non provoca invece necessariamente un andamento decrescente del coefficiente di variabilità del costo aggregato (vedi figura 52), anche nel caso di indipendenza tra le due linee.

Nel caso aggregato, infatti, il coefficiente sarà per definizione, nel caso di indipendenza, inferiore alla somma dei coefficienti relativi alle singole linee, ma non necessariamente è preservato l'andamento decrescente in funzione del tempo: tale andamento dipenderà infatti dai valori assunti dai parametri delle due linee in esame.

**Figura 52: Coefficiente di variabilità relativo del costo sinistri delle singole linee e del costo aggregato**

T	Cv= $\sigma(X)/E(x)$		
	RcAuto	RcMedica	Aggregato
1	0,1803	0,4823	0,2216
2	0,1800	0,4734	0,2217
3	0,1796	0,4648	0,2218
4	0,1793	0,4566	0,2219
5	0,1790	0,4488	0,2220
$\sigma(q)$	0,1596	0,2928	

Tale situazione è un caso molto particolare dovuto ai parametri scelti e alla presenza dei fattori di disturbo q. Il coefficiente, infatti, può essere scritto nel modo seguente in assenza di fattori di disturbo:

$$Cv_{t, X_1+X_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{(1+g_1)^t} \left[ Cv_{X_1}^2 + Cv_{X_2}^2 \frac{n_2^2 m_2^2 (1+g_2)^t}{n_1^2 m_1^2 (1+g_1)^t} \right]}}{1 + \frac{(1+g_2)^t}{(1+g_1)^t} \frac{n_2 m_2}{n_1 m_1}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{(1+g_1)^t} \left[ k_1 + k_2 \frac{(1+g_2)^t}{(1+g_1)^t} \right]}}{1 + \frac{(1+g_2)^t}{(1+g_1)^t} k_3}$$

dove con k vengono indicate delle grandezze che si mantengono costanti nel tempo.

In particolare tale coefficiente decresce sicuramente quando i due tassi di crescita non assumono valori molto differenti<sup>94</sup>, ovvero vale una delle seguenti relazioni:

$$- (1+g_1)^2 > (1+g_2) > (1+g_1)$$

<sup>94</sup> Il denominatore di tale grandezza risulta crescente o decrescente a seconda della seguente relazione:  $(g_2) > (g_1)$  e

la variazione risulta pari a:  $k_3 \left[ \frac{(1+g_2)^t}{(1+g_1)^t} - \frac{(1+g_2)^{t-1}}{(1+g_1)^{t-1}} \right]$

La variazione annua del numeratore è invece pari a  $\frac{1}{(1+g_1)^t} [k_1(1+g_1)^t(-g_1) + k_2(1+g_2)^{t-1} [g_2 - g_1^2 - 2g_1]]$

ed è sicuramente decrescente se  $(1+g_1)^2 > (1+g_2)$

La possibilità di incremento del coefficiente è legata unicamente ad una differenza molto accentuata tra i due parametri g. Numericamente si può infatti dimostrare che, considerando due rami con tassi di crescita molto diversi ed ipotizzando che il ramo con tasso di crescita più elevato abbia una variabilità elevata e costi medi e sinistri medi contenuti, è possibile ottenere coefficienti di variabilità crescenti

$$-(1+g_2)^2 > (1+g_1) > (1+g_2).$$

In presenza di fattori di disturbo il coefficiente di variabilità aggregato ha una struttura analoga a quella osservata con il processo di Poisson semplice.

Si osserva però un numeratore con valore più elevato per effetto della variabilità dei due fattori di disturbo e viene meno la dimostrazione della decrescenza del coefficiente anche qualora vengano soddisfatte le relazioni descritte in precedenza<sup>95</sup>:

$$Cv_{t, X_1+X_2} = \frac{\sqrt{\frac{1}{(1+g_1)^t} \left[ k_1 + k_2 \frac{(1+g_2)^t}{(1+g_1)^t} \right] + \sigma_{q_1}^2 + \sigma_{q_2}^2 \frac{(1+g_2)^{2t}}{(1+g_1)^{2t}} k_3^2}}{1 + \frac{(1+g_2)^t}{(1+g_1)^t} k_3}$$

L'introduzione di una correlazione positiva sul numero dei sinistri, modellizzata attraverso una copula Gaussiana, provoca l'atteso incremento della varianza.

Si può osservare che anche in presenza di correlazione il modello restituisce una buona stima dei principali momenti e della correlazione del costo aggregato.

In particolare il coefficiente di correlazione introdotto sul numero dei sinistri crea una struttura di dipendenza positiva anche sul costo aggregato dei sinistri ma di entità inferiore a quella introdotta sul numero. Pur mantenendo invariato nel tempo il coefficiente di correlazione sul numero dei sinistri, la dipendenza tra i costi aggregati si modifica in quanto risente anche del comportamento del costo del singolo sinistro.

Introducendo dunque una struttura di dipendenza positiva sul numero dei sinistri, si avrà una correlazione crescente sul costo aggregato per effetto della crescita sia del numero dei sinistri sia dei costi medi del singolo sinistro<sup>96</sup>.

**Figura 53: Momenti Esatti e Simulati in caso di dipendenza tra il numero dei sinistri, modellizzata attraverso una copula Gaussiana e correlazione pari a 0,68847 (100.000 simulazioni)**

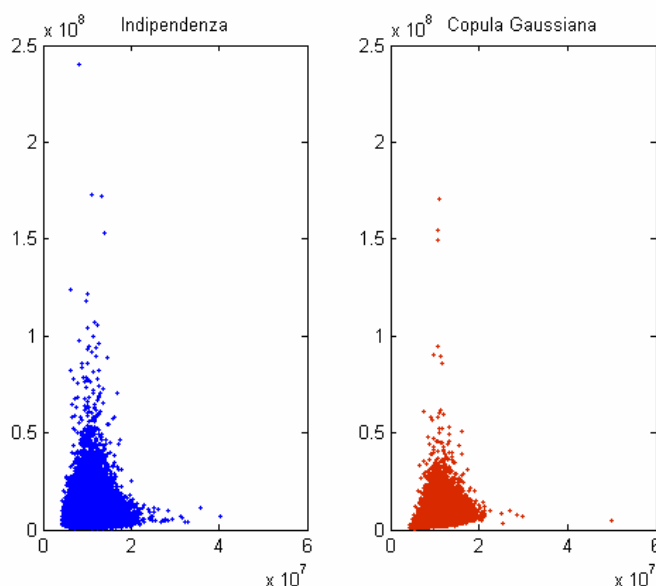
<b>Costo Aggregato Totale (Dipendenza tra le due linee: copula gaussiana)</b>							
	Esatti			Simulati			
T	Media	Dev. Standard	Correlazione	Media	Dev. Standard	Asimmetria	Correlazione
1	17.887.866	4562954	0,3815	17.878.792	4572053	3,2466	0,3799
2	18.988.535	4848386	0,3888	18.980.119	4810864	1,7816	0,3925
3	20.165.358	5153879	0,3962	20.165.123	5157630	2,7175	0,3950
4	21.424.130	5480992	0,4036	21.433.335	5527645	3,0823	0,3962
5	22.771.119	5831414	0,4109	22.781.637	5771654	1,4505	0,4104

<sup>95</sup>La variazione annua del numeratore è in questo caso pari a

$$\frac{1}{(1+g_1)^t} \left[ k_1 (1+g_1)^t (-g_1) + k_2 (1+g_2)^{t-1} [g_2 - g_1^2 - 2g_1] + \sigma_{q_2}^2 k_3^2 (1+g_2)^{t-2} [g_2^2 + 2g_2 - g_1^2 - 2g_1] \right]$$

<sup>96</sup> Si veda in proposito la formula della covarianza del costo aggregato in presenza di dipendenza sul numero sinistri (paragrafo 4.1)

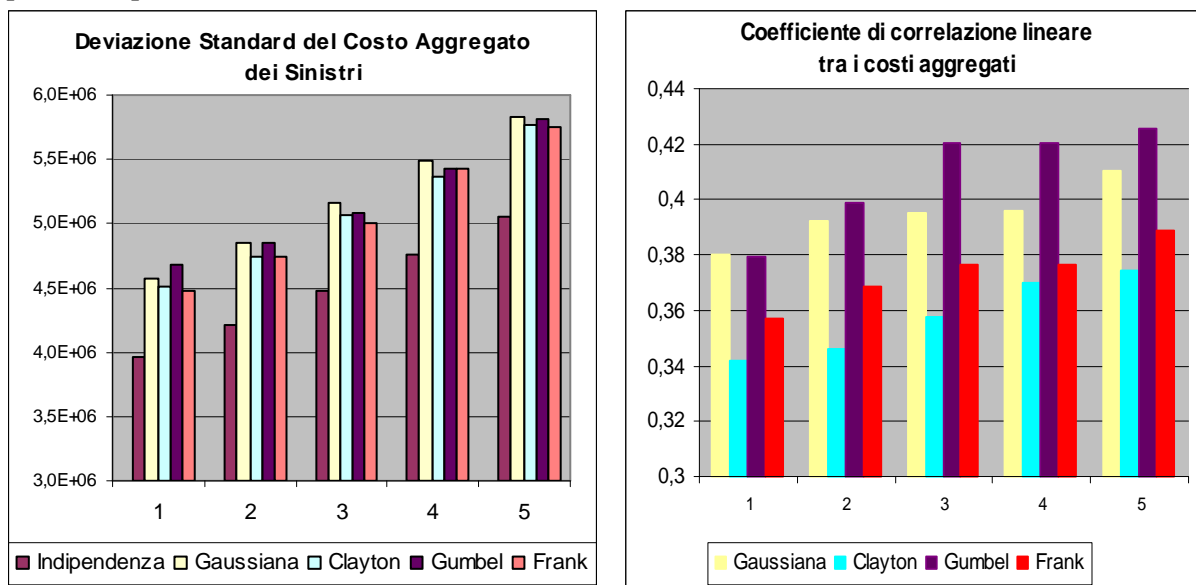
**Figura 54: Andamento del costo dei sinistri relativi ai due rami rispettivamente in caso di dipendenza tra il numero dei sinistri (copula Gaussiana con correlazione pari a 0,68847) e indipendenza (100.000 simulazioni)**



Le differenze in termine di variabilità, già osservate sul numero dei sinistri, prodotte dalle diverse strutture di dipendenza si riflettono anche sul costo aggregato.

Più interessante è sicuramente l'analisi del coefficiente di correlazione tra i costi aggregati relativi ai due rami esaminati. Si osserva sia l'andamento crescente della struttura di dipendenza nel tempo, sia la maggiore struttura di dipendenza introdotta dalla copula Gumbel e la minore dipendenza sulle coda destra della Clayton.

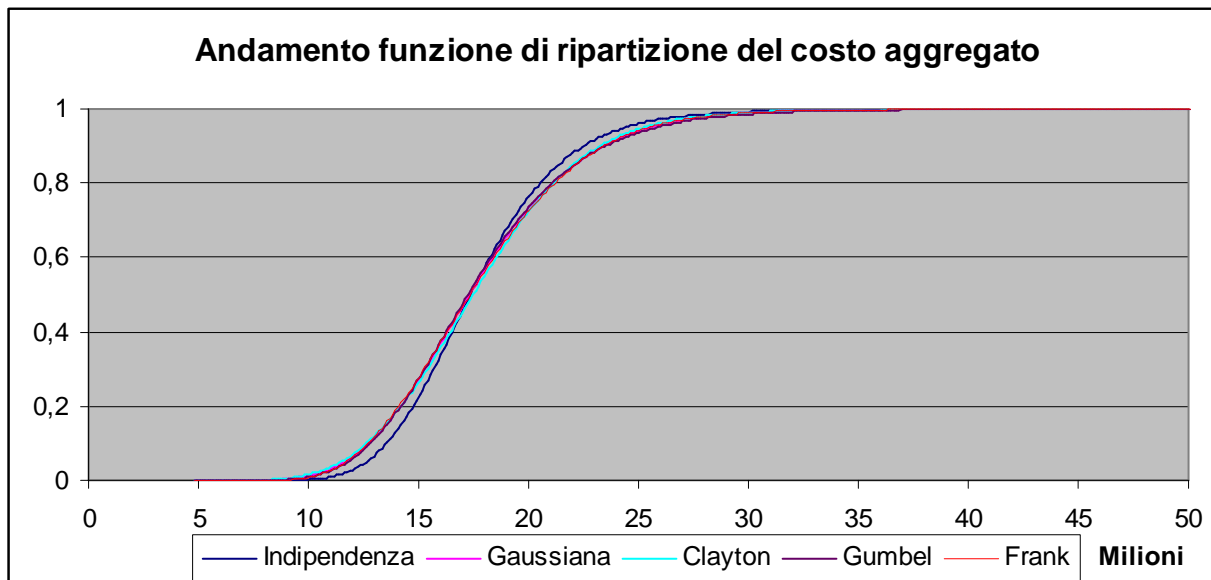
**Figura 55: Deviazione Standard del costo aggregato dei sinistri e correlazione lineare tra i due rami sotto diverse ipotesi di dipendenza**



Analogamente anche l'andamento della funzione di ripartizione del costo aggregato mostra la minore variabilità della distribuzione in caso di indipendenza.

La funzione di ripartizione del costo aggregato ed in particolare la coda destra riflettono le caratteristiche delle diverse strutture di dipendenza ipotizzate: si osserva, ad esempio, la maggiore probabilità introdotta dalla copula Gumbel.

**Figura 56: Andamento della Funzione di Ripartizione del costo Aggregato (troncata a 50 Milioni di Euro)**



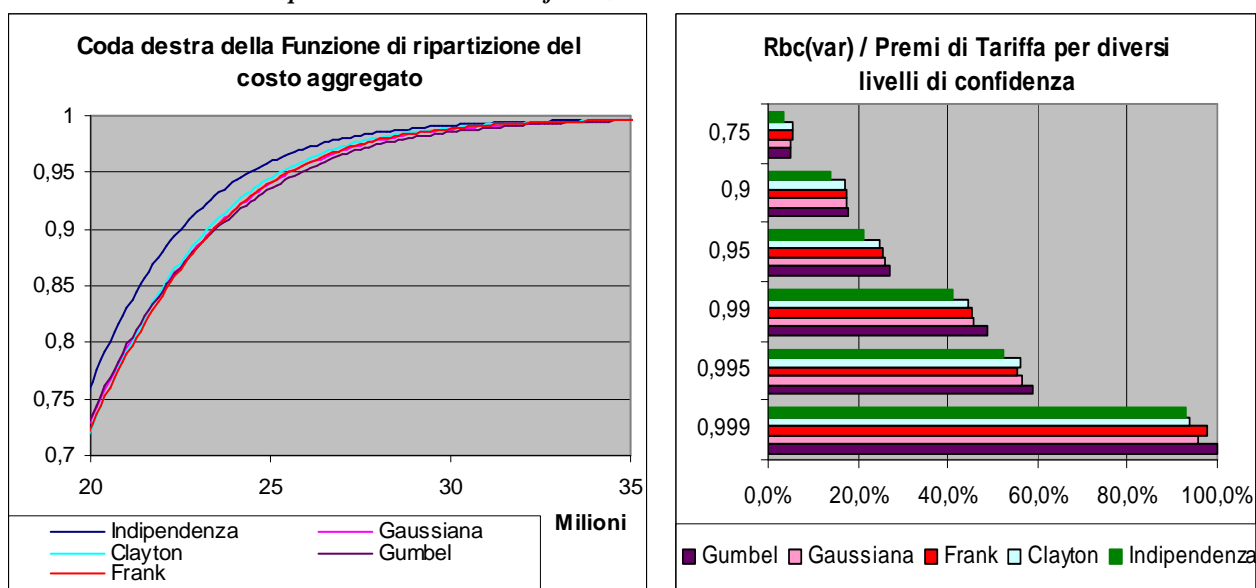
E' interessante infine osservare che l'introduzione di una correlazione positiva sul numero dei sinistri, provoca un incremento non trascurabile in termini di requisito di capitale.

Si può infatti osservare che per i livelli di confidenza tra il 95% e il 99%, i più realistici rispetto agli standard attuali, il requisito di capitale si incrementa in media di circa il 5% dei premi rispetto alla situazione di indipendenza tra i due rami.

Tale incremento in realtà risulta ancora maggiore qualora la correlazione sia modellizzata attraverso copule con dipendenza di coda più accentuata: ad esempio per un livello di confidenza del 99%, si osserva un rapporto  $Var/B$  pari al 48,8% con la copula Gumbel rispetto al 41,1% del caso di indipendenza.

Occorre infine sottolineare che, considerando livelli di confidenza molto elevati (99,5% e 99,9%), le caratteristiche delle diverse strutture di dipendenza non sempre sono preservate: in particolare, nonostante il numero elevato di simulazioni 100.000 sembra che la copula Frank restituisca un requisito di capitale troppo elevato sulla coda.

**Figura 57: Coda Destra della funzione di ripartizione (troncata a 35 Milioni di Euro) e  $Rbc^{97}$  su premi tariffa calcolato attraverso il Var per diversi livelli di confidenza**



Allo scopo di verificare l'effettiva rispondenza della struttura di dipendenza alle serie storiche analizzate, è stata introdotta sempre attraverso le funzioni copula una correlazione negativa fra i costi dei sinistri osservati sulle due linee in oggetto.

In particolare l'introduzione della correlazione negativa ( $\rho = -0,51517$ ) fra le variabili Z, oltre alla correlazione positiva sul numero dei sinistri, produce una riduzione della variabilità del costo aggregato rispetto al caso analizzato in precedenza e una conseguente riduzione della correlazione fra i due rami.

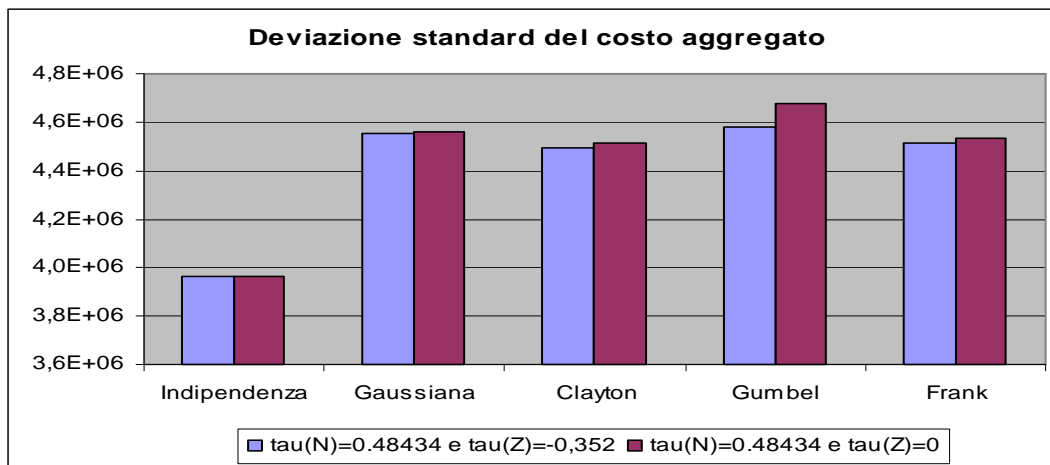
In realtà l'impatto della correlazione tra i costi dei singoli sinistri sulla variabilità del costo aggregato è di gran lunga più contenuto rispetto all'effetto prodotto dalla correlazione sul numero dei sinistri.

Tale risultato porterebbe a concludere che in un'ottica di individuazione dell'idoneo requisito di capitale risulta molto più significativo lo studio delle eventuali dipendenze presenti sul numero dei sinistri dei rami esercitati trascurando invece l'impatto delle correlazioni sul costo dei sinistri, che come riportato, è decisamente più contenuto.

In realtà occorre rilevare, come si vedrà nel dettaglio nel paragrafo seguente, che l'effetto della correlazione dei costi sinistri sul costo aggregato varia in funzione delle caratteristiche del portafoglio analizzato.

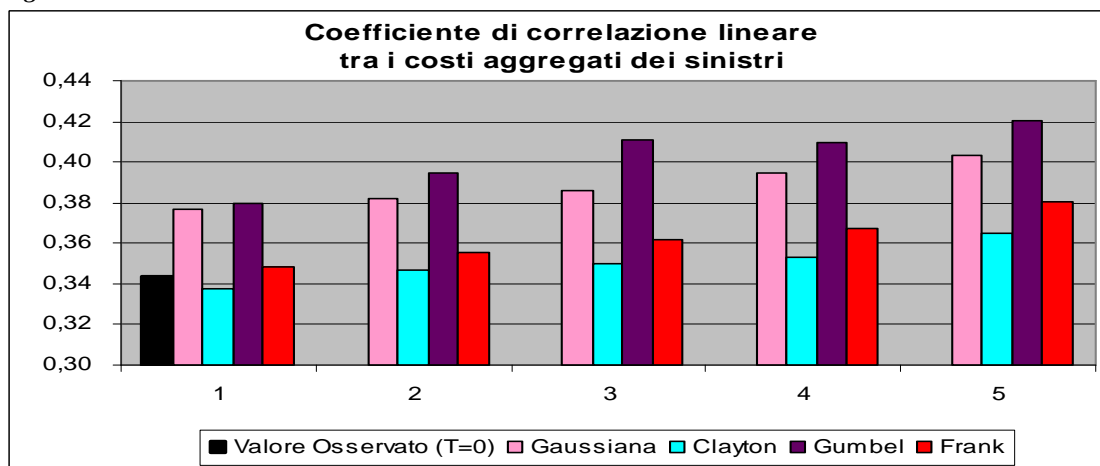
<sup>97</sup> Tale indicatore è calcolato nel modo seguente:  $[\text{Var}(\alpha) - P(1+\lambda)]/B$

**Figura 58: Deviazione standard del costo aggregato nel caso di indipendenza, dipendenza positiva tra i numeri dei sinistri e indipendenza tra i costi, dipendenza positiva tra i numeri dei sinistri e negativa tra i costi dei sinistri**



L'effetto congiunto tra le diverse copule utilizzate e i differenti gradi di dipendenza presenti sul numero e sul costo dei sinistri permette di ottenere due variabili aleatorie che, pur mantenendo invariate nei diversi scenari le proprie caratteristiche individuali in termini di media varianza e asimmetria, sono fra loro diversamente correlate dando origine in ogni scenario ad un diverso costo aggregato totale.

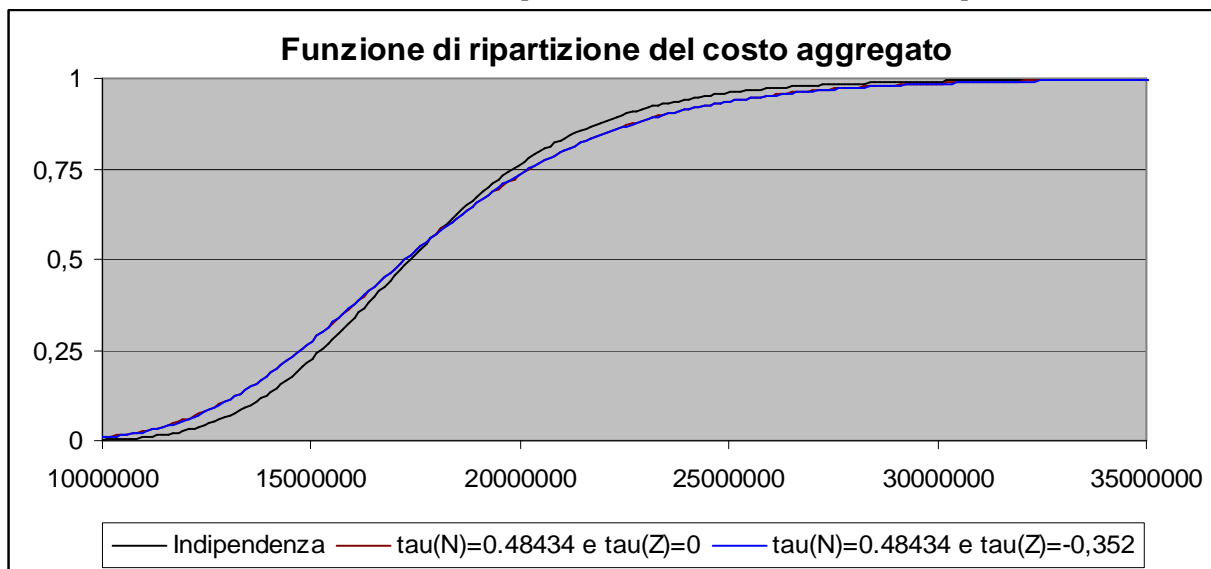
**Figura 59: Correlazione tra i due rami esercitati nell'ipotesi di dipendenza positiva tra i numeri dei sinistri e negativa tra i costi dei sinistri**



In particolare, nel caso analizzato di dipendenza tra entrambe le grandezze (numero e costo sinistri), le diverse copule restituiscono, per identici valori di Tau, costi aggregati diversamente correlati. E' interessante sottolineare che, per il primo anno, si ottengono comunque livelli di correlazione molto vicini a quello evidenziato dalle serie storiche relative al costo aggregato dei sinistri osservati (0,34 circa).

Occorre inoltre osservare che l'introduzione della dipendenza negativa sui costi dei sinistri provoca una riduzione della correlazione tra i costi aggregati rispetto allo scenario analizzato in precedenza caratterizzato unicamente dalla dipendenza positiva sul numero dei sinistri (vedi figura 55).

**Figura 60: Funzione di ripartizione del costo aggregato totale relativo alle due linee esercitate (dipendenza sul numero dei sinistri modellizzata attraverso la copula Gumbel e sul costo attraverso la copula Gaussiana)**



Anche la funzione di ripartizione del costo aggregato totale (figura 60) evidenzia l'effetto marginale derivante dalla dipendenza tra i costi dei singoli sinistri: tra la situazione di dipendenza sul numero e sul costo dei sinistri e la situazione di dipendenza solo sul numero dei sinistri, si osservano infatti differenze molto contenute.

In particolare il coefficiente di variabilità del loss ratio puro si riduce solo lievemente per effetto dell'introduzione della correlazione negativa sul costo dei sinistri. Anche in presenza di correlazione l'andamento del coefficiente di variabilità presenta un andamento crescente al crescere del portafoglio.

**Figura 61: Media e standard deviation del loss ratio puro (X/P) nelle tre diverse ipotesi.**

Momenti del Loss Ratio puro (X/P)					
Indipendenza		Dipendenza (Copula Gumbel)			
		tau(N)=0.48434 e tau(Z)=0		tau(N)=0.48434 e tau(Z)=-0,352	
Media	Dev. Standard	Media	Dev. Standard	Media	Dev. Standard
1,000	0,22164	0,999	0,25630	1,001	0,25590
1,000	0,22170	1,000	0,25624	1,000	0,25578
1,001	0,22178	1,000	0,25863	1,001	0,25675
1,000	0,22190	1,000	0,25877	0,998	0,25631
1,000	0,22204	1,000	0,25845	1,000	0,25683

I percentili del loss ratio X/P evidenziano l'elevata asimmetria della distribuzione, evidenziando una probabilità del 50% di ottenere loss ratio inferiori al 96% circa.



Con probabilità pari al 5% si ottengono invece loss ratio superiori al 130-140% del premio puro, pari circa ai premi di tariffa incassati: il rapporto B/P è infatti pari al 141,14%

Si osserva inoltre come l'introduzione delle dipendenze provoca un incremento delle probabilità di ottenere costi dei sinistri superiori ai premi di tariffa, in quanto tali premi sono stati calcolati senza considerare l'eventuale dipendenza tra i rami.

**Figura 62: Mediana e percentili del Loss Ratio Puro (X/P)**

Percentili del Loss Ratio puro (X/P)						
		mediana	75%	80%	95%	99%
Indipendenza		96,39%	110,69%	114,10%	135,89%	163,80%
tau(N)=0.48434 e tau(Z)=0	Copula Gumbel	95,71%	112,73%	117,50%	144,06%	174,70%
	Copula Clayton	97,07%	113,42%	117,50%	140,65%	168,57%
tau(N)=0.48434 e tau(Z)=-0,352	Copula Gumbel	95,42%	112,32%	116,15%	143,41%	173,80%
	Copula Clayton	95,57%	111,92%	116,00%	139,65%	167,57%

L'introduzione della dipendenza negativa sul costo dei sinistri provoca infine una riduzione della variabilità della distribuzione (già osservata in precedenza) e una diminuzione delle probabilità sulle code: si può infatti osservare un requisito di capitale lievemente più contenuto.

**Figura 63: Rapporto tra requisito di capitale (calcolato utilizzando il Var) e premi di tariffa**

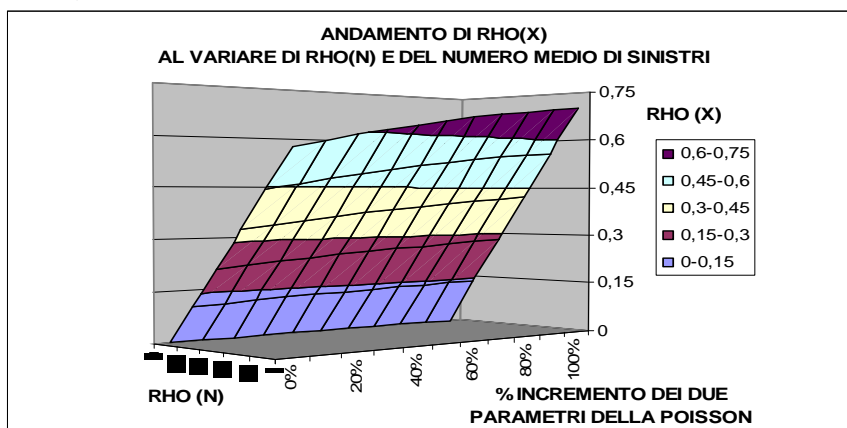
Rbc(var)/Premi di Tariffa			
$\alpha$	Indipendenza	Dipendenza (Copula Gumbel)	
		tau(N)=0.48434 e tau(Z)=0	tau(N)=0.48434 e tau(Z)=-0,352
0,995	52,1%	58,9%	58,5%
0,990	40,8%	48,7%	48,2%
0,950	21,3%	27,1%	26,6%
0,900	13,9%	17,8%	17,3%
0,750	3,1%	5,1%	4,6%

## 4.5 Alcune analisi di sensitività

Può essere infine interessante analizzare il diverso impatto delle due componenti, numero di sinistri e costo sinistri, sul costo aggregato al variare delle caratteristiche dei portafogli. In particolare i due grafici seguenti mostrano l'effetto della dipendenza tra il numero dei sinistri sul costo aggregato al variare del numero medio e del costo medio dei sinistri.

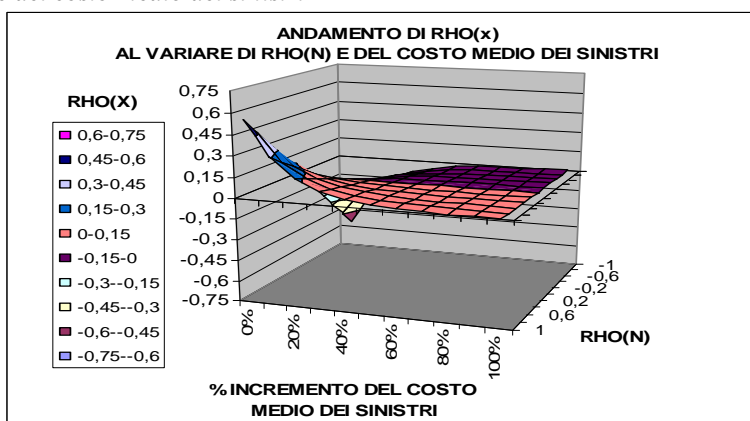
Si osserva (figura 64) che l'incremento dei parametri della Poisson ed il relativo incremento del numero medio di sinistri, provoca a parità di  $\rho_N$  una maggiore correlazione sui costi aggregati: raddoppiando i due parametri della Poisson, la correlazione della X s'incrementa di circa il 25%.

**Figura 64: Andamento del coefficiente di correlazione del costo aggregato al variare dei parametri della Poisson e del coefficiente di correlazione della N**



Molto diverso risulta invece l'effetto del coefficiente di correlazione del numero dei sinistri al variare del costo medio dei sinistri (figura 65). Si osserva, infatti, che il crescere del costo medio provoca una rilevante riduzione dell'effetto di  $\rho_N$  sulla correlazione del costo aggregato dei sinistri. Mantenendo gli attuali numeri dei sinistri  $\rho_X$  tende rapidamente a zero al crescere del costo medio dei sinistri, incrementando sia il valore dei parametri della Poisson sia gli eventuali costi medi si otterrebbe una diminuzione più lenta di  $\rho_X$ .

**Figura 65: Andamento del coefficiente di correlazione del costo aggregato al variare del coefficiente di correlazione del numero dei sinistri e del costo medio dei sinistri**



Mantenendo invariati i parametri prefissati inizialmente delle distribuzioni del numero e del costo dei sinistri, è interessante analizzare il diverso comportamento della funzione di densità del costo aggregato al variare di  $\rho_N$ .

In particolare al crescere della dipendenza fra i numeri dei sinistri si osserva una maggiore variabilità del costo aggregato (figura 66) e un conseguente requisito di capitale crescente (figura 67): la variazione del coefficiente  $\rho_N$  ha un effetto sempre più significativo al crescere dei livelli di confidenza utilizzati per il calcolo del Value at Risk.

Figura 66: Funzione di densità del costo aggregato per diverse ipotesi di dipendenza (troncata a 100 milioni)

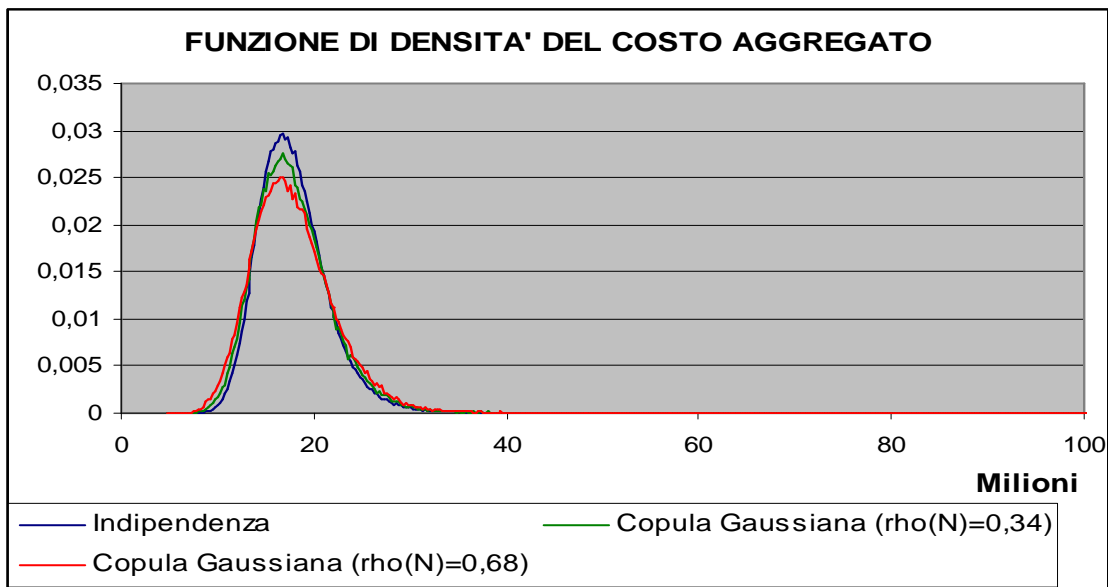
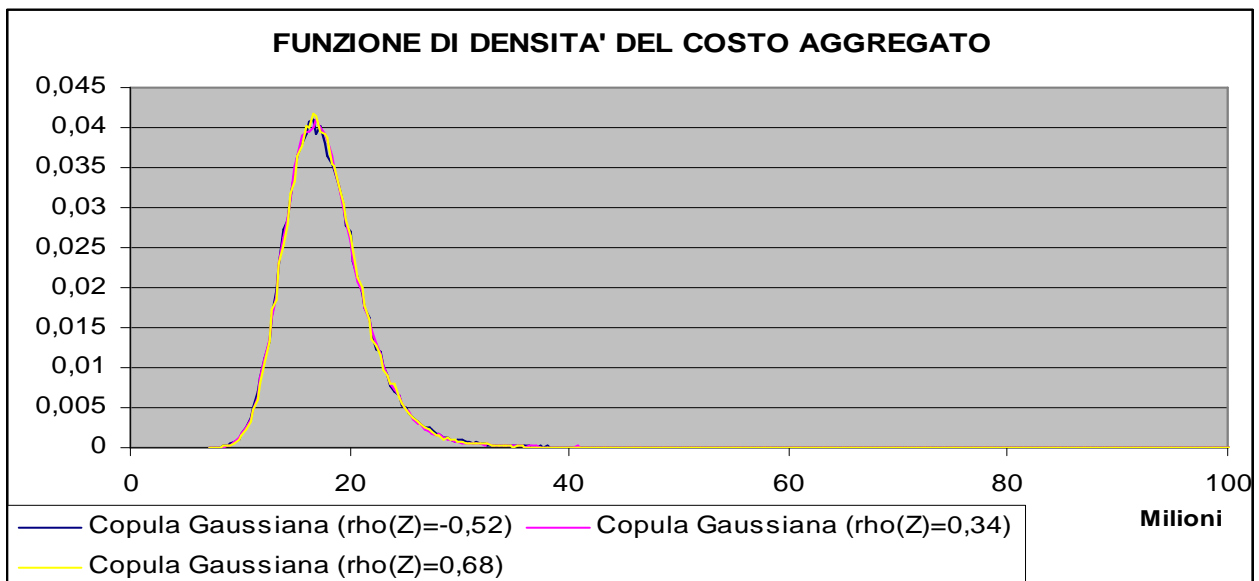


Figura 67: Var/B nelle diverse ipotesi

$\alpha$	Indipendenza	Copula Gaussiana ( $\rho(N)=0,34$ )	Copula Gaussiana ( $\rho(N)=0,68$ )
99,50%	52,19%	53,40%	56,53%
99,00%	41,09%	42,78%	45,92%
95,00%	21,31%	23,49%	26,14%
90,00%	14,08%	14,80%	17,45%
75,00%	3,46%	3,22%	4,91%

Nelle ipotesi formulate risulta decisamente più contenuto l'effetto della dipendenza del costo dei sinistri sulla funzione di densità del costo aggregato e sul relativo requisito di capitale. Si osserva, infatti, una riduzione del requisito in presenza di correlazione negativa tra i costi sinistri ed un incremento del requisito al crescere di  $\rho_Z$

Figura 68: Funzione di densità del costo aggregato per diverse ipotesi di dipendenza (troncata a 100 milioni)



**Figura 69: Var/B nelle diverse ipotesi**

$\alpha$	Indipendenza	Copula Gaussiana (rho(Z)=-0,52)	Copula Gaussiana (rho(Z)=0,34)	Copula Gaussiana (rho(Z)=0,68)
99,50%	52,19%	51,45%	52,95%	53,45%
99,00%	41,09%	41,05%	41,36%	42,71%
95,00%	21,31%	20,56%	22,36%	22,56%
90,00%	14,08%	13,84%	14,25%	14,50%
75,00%	3,46%	3,10%	3,50%	4,10%

## 4.6 Un confronto tra diversi approcci

L'approccio simulativo proposto è una delle possibile alternative adottabili per la valutazione dell'idoneo requisito di capitale. I recenti sviluppi nell'ambito solvency II hanno dato origine a diverse proposte per la valutazione del premium risk. In particolare nel seguito s'intenderanno confrontare i principali risultati ottenuti utilizzando un modello simulativo, calibrato su dati di un'ipotetica impresa operante sul mercato, con gli eventuali requisiti che la stessa impresa dovrebbe accantonare qualora la metodologia di calcolo fosse quella proposta dall'International Actuarial Association.

L'approccio proposto da Glenn Meyers e ripreso dall'IAA<sup>98</sup> si basa sull'introduzione del parametro  $\beta$ , definito "covariance generator" e sull'ipotesi di distribuzione lognormale del costo aggregato dei sinistri.

Tale approccio è stato applicato utilizzando per l'impresa gli stessi parametri definiti in precedenza (vedi dati in figura 34) e considerando due scenari alternativi per la stima della varianza del costo aggregato X.

Uno degli aspetti più critici, sottolineato dalla stessa International Actuarial Association<sup>99</sup>, è rappresentato dalla quantificazione della grandezza  $\beta_i + c_i + \beta_i c_i$  basata sulla stima dei parametri  $\beta_i$  e  $c_i$  utili per l'implementazione della Factor Based Formula.

In realtà il parametro  $c_i$  non è altro che la varianza del fattore di disturbo  $q$  introdotto nella variabile numero dei sinistri: valendo infatti la relazione  $\sigma_{n_i}^2 = n_i + n_i^2 \sigma_{q_i}^2 = n_i + n_i^2 c_i$ , si ricava agevolmente  $c_i$ .

Per la stima del fattore  $\beta_i$  occorre invece far ricorso alla varianza del costo aggregato in presenza di correlazione. Partendo infatti dalla relazione proposta dall'IAA<sup>100</sup> ristretta a due rami assicurativi e

<sup>98</sup> per maggiori dettagli vedi paragrafo 1.3

<sup>99</sup> Si veda in proposito: commento 3.12 pag 112 in "A Global Framework for Insurer Solvency Assessment", IAA

<sup>100</sup> Vedi paragrafo 1.3 della presente tesi o pag. 111 in "A Global Framework for Insurer Solvency Assessment", IAA

stimata la varianza del costo aggregato e dei costi relativi ai due rami in assenza di parametro  $\beta$ , si otterrà:

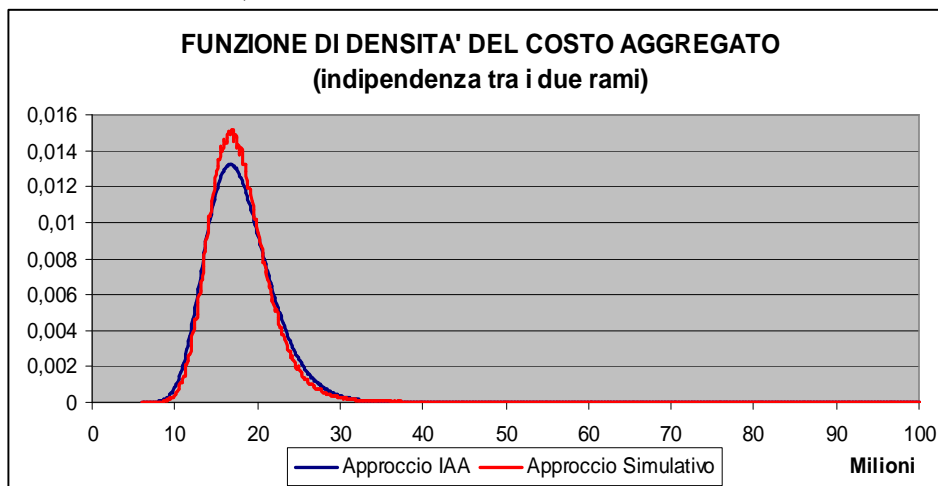
$$\beta = \frac{Var(X) - \sum_{i=1}^2 [Var(X_i)]}{2E(X_1)E(X_2) + \sum_{i=1}^2 [Var(X_i) + E(X_i)^2]}$$

Nel seguito verranno così stimati diversi valori del parametro a seconda dei casi analizzati.

L'ipotesi più semplice è rappresentata dall'indipendenza tra i due rami assicurativi:

in questo caso ponendo  $\beta = 0$  e stimando i parametri della distribuzione LogNormale<sup>101</sup> che descrive il costo aggregato sarà possibile raffigurarne l'andamento e ottenere il requisito di capitale secondo l'approccio dell'IAA.

**Figura 70: Funzione di densità del costo aggregato dei sinistri in ipotesi di indipendenza tra i due rami (grafico troncato a 100 milioni)**



In caso di indipendenza l'approccio proposto dall'IAA restituisce, in generale, requisiti di capitale inferiori a quelli ottenuti col metodo simulativo. In realtà l'ipotesi di approssimazione della distribuzione del costo aggregato dei sinistri con una LogNormale risulta non così rispondente alla realtà.

Si osserva, infatti, un diverso comportamento della distribuzione simulata che prevede un'asimmetria decisamente più marcata della LogNormale portando a requisiti<sup>102</sup> notevolmente più elevati per i livelli di confidenza più alti.

<sup>101</sup> I due parametri possono essere stimati sulla base delle seguenti relazioni:

$$\sigma = \sqrt{\ln \left[ 1 + \left( \frac{\sigma_x}{\mu_x} \right)^2 \right]} \quad \mu = \ln(\mu_x) - \frac{\sigma^2}{2}$$

**Figura 71: Momenti esatti del costo aggregato e momenti ottenuti utilizzando i due diversi approcci**

	<b>Momenti Esatti</b>	<b>Modello Simulativo</b>	<b>Approccio IAA</b>
Media	17.887.866,00	17.890.409,50	17.887.866,00
Deviazione Standard	3.964.737,02	3.950.027,54	3.964.737,02
Asimmetria	5,10	5,97	0,68

Su livelli di confidenza più contenuti le due distribuzioni presentano differenze meno marcate portando a simili requisiti di capitale

**Figura 72: Confronto tra i requisiti di capitale, (calcolati con Var e TVar) rapportati ai premi di tariffa, stimati con l'approccio simulativo e con il metodo proposto dall'IAA nell'ipotesi di indipendenza tra i due rami.**

	<b>Modello Simulativo</b>		<b>Approccio IAA</b>	
<b><math>\alpha</math></b>	rbcVar/B	rbcTVar/B	rbcVar/B	rbcTVar/B
99,5%	52,10%	78,4%	46,6%	55,6%
99,0%	40,84%	61,9%	40,2%	49,3%
95,0%	21,26%	34,9%	24,2%	34,1%
90,0%	13,91%	26,1%	16,6%	27,1%

Introducendo la struttura di dipendenza sia sul numero sia sul costo dei sinistri è possibile confrontare nuovamente i due approcci.

In particolare introducendo un parametro  $\beta$  pari 0,015590832, stimato considerando la varianza del costo aggregato dei sinistri, comprensiva delle strutture di dipendenza, si ottiene una nuova distribuzione LogNormale per descrivere il comportamento della variabile X.

Anche in questo caso la LogNormale ottenuta mediante l'approccio proposto dall'IAA ha un'asimmetria decisamente più contenuta di quella calibrata sui dati attraverso il modello simulativi (vedi figura 73).

**Figura 73: Momenti del costo aggregato in ipotesi di correlazione**

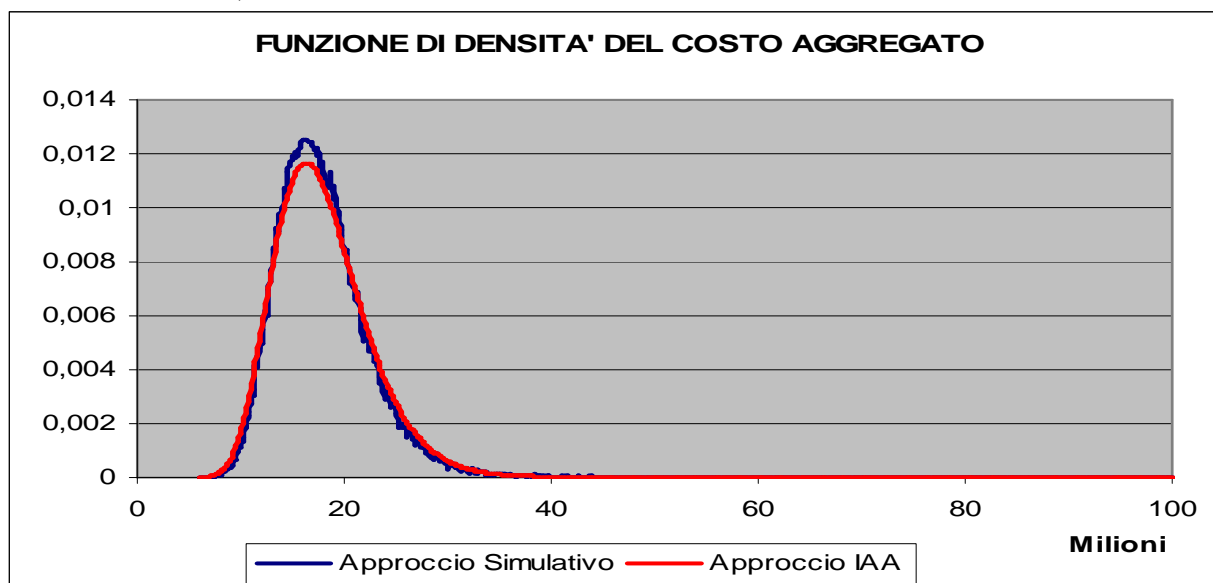
	<b>Modello Simulativo</b>	<b>Approccio IAA</b>
Media	17.887.866,00	17.887.866,00
Deviazione Standard	4.577.434,03	4.577.434,03
Asimmetria	2,88	0,78

<sup>102</sup> I requisiti di capitale sono stati calcolati sulla base della seguente formula:

$$rbcVar / B = \frac{Var_{\alpha} - [P_1(1 + \lambda_1) + P_2(1 + \lambda_2)]}{B_1 + B_2}$$

Tale formula è stata applicata anche all'approccio dell'International Actuarial Association per rendere i requisiti confrontabili con quelli ottenuti con il modello simulativo. In realtà il procedimento descritto dall'IAA non dovrebbe considerare l'effetto del caricamento e si otterrebbero requisiti di capitale più elevati

**Figura 74: Funzione di densità del costo aggregato dei sinistri in ipotesi di correlazione tra i due rami (grafico troncato a 100 milioni)**



Per i livelli di confidenza più elevati, si osserva anche in questo caso un requisito decisamente più contenuto nel caso di utilizzo dell'approccio proposto dall'IAA per la stima dello stesso.

**Figura 75: Confronto tra i requisiti di capitale, (calcolati con Var e TVar) rapportati ai premi di tariffa, stimati con l'approccio simulativo e con il metodo proposto dall'IAA nell'ipotesi di correlazione tra i due rami.**

$\alpha$	Modello Simulativo		Approccio IAA	
	rbcVar/B	rbcTVar/B	rbcVar/B	rbcTVar/B
99,5%	58,46%	84,7%	56,4%	67,6%
99,0%	48,18%	69,4%	48,4%	59,8%
95,0%	26,64%	42,1%	28,9%	41,0%
90,0%	17,34%	32,0%	19,8%	32,4%

In generale dunque l'approccio proposto dall'International Actuarial Association permette attraverso l'introduzione del parametro  $\beta$  di cogliere l'effetto della correlazione tra i rami assicurativi esercitati: la stessa figura 75 mostra come entrambi gli approcci restituiscano requisiti crescenti al crescere della correlazione tra i rami.

Il limite principale sta nell'ipotesi restrittiva di approssimazione della distribuzione del costo aggregato dei sinistri con la LogNormale. Tale ipotesi non sempre trova un'adeguata rispondenza nella realtà, sia perchè tale distribuzione non rappresenta sempre la migliore alternativa per descrivere il costo dei sinistri, sia perchè anche nel caso la LogNormale garantisca un buon adattamento, i due parametri stimati non sempre sono in grado di ben replicare l'asimmetria dei dati reali.

Si può comunque osservare che su livelli di confidenza del 99% l'approccio dell'International Association si avvicina notevolmente, per un portafoglio di piccole dimensioni, al requisito ottenuto applicando il metodo simulativo e la copula Gumbel.

L'approccio IAA, calcolato con il  $\text{Var}_{99\%}$ , sembra dunque allinearsi al requisito calcolato con la struttura di dipendenza più penalizzante; utilizzando, ad esempio, il metodo simulativo e la copula gaussiana si ottiene, ad un livello del 99%, un requisito del 45% inferiore al requisito dell'IAA.

Tale risultato è in linea con l'esigenza di individuare una standard formula che eviti la sottostima del requisito di capitale.

*Figura 76: Requisiti di capitale ( $\text{rbcVar/B}$ ) secondo i due approcci per diversi livelli di correlazione*

<b>Metodo Simulativo</b>			
$\alpha$	Indipendenza	Copula Gumbel ( $\rho(N)=0,34$ )	Copula Gumbel ( $\rho(N)=0,684$ )
99,50%	52,10%	55,32%	58,46%
99,00%	40,84%	45,04%	48,18%
95,00%	21,26%	23,99%	26,64%
90,00%	13,91%	14,69%	17,34%
<b>Approccio International Actuarial Association</b>			
$\alpha$	Indipendenza	$\beta=0,0076$	$\beta=0,01519$
99,50%	46,63%	51,48%	56,35%
99,00%	40,17%	44,26%	48,35%
95,00%	24,21%	26,57%	28,91%
90,00%	16,62%	18,24%	19,82%

#### **4.7 Un confronto con il requisito introdotto dal Qis2**

Un secondo approccio che ha suscitato particolare fermento nella seconda metà del 2006 è rappresentato dalla metodologia di calcolo del capitale Scr proposto dal secondo studio di impatto quantitativo redatto dal Ceiops. Può essere dunque interessante confrontare l'eventuale requisito di capitale richiesto dall'autorità di vigilanza secondo il metodo proposto dal Qis2, con i risultati ottenuti dall'applicazione del possibile modello interno.

Limitandosi alla stima del requisito previsto per il premium risk, si può osservare uno scostamento notevole tra il requisito previsto dal Ceiops e l'analogo requisito ottenuto applicando il metodo simulativo nelle ipotesi di indipendenza tra i due rami e ad un livello di confidenza del 99%. Si osserva, inoltre, un SCR pari al doppio del requisito ottenuto applicando l'approccio dell'International Actuarial Association con il TailVar al 99%.



**Figura 77: Rbc/B per diversi approcci nell'ipotesi di indipendenza tra i due rami**

	Approccio simulativo				QIS2	IAA		
Misura	Var	Tvar	Var	Tvar	SCR	Tvar	Var	Tvar
Livello di confidenza	99%	99%	99,5%	99,5%	99,0%	99%	99,5%	99,5%
Rbc/B	41,10%	61,91%	52,10%	78,40%	101%	49,33%	46,60%	55,60%

Occorre comunque fare alcune osservazioni in merito al criterio di calcolo utilizzato per la stima del requisito Qis2: i due requisiti sono stati ottenuti utilizzando i valori di volatilità di mercato e di correlazione proposti dal Ceiops per i rami esaminati, potrebbe accadere che tali valori non siano strettamente adeguati per le caratteristiche del portafoglio analizzato.

Il secondo approccio, basato sull'analisi della serie storica dei combined ratio, ha dunque lo scopo di individuare un requisito più idoneo alla rischiosità dell'impresa qualora i parametri del QIS2 sovrastimino tale requisito.

L'applicazione di tale metodologia risulta particolarmente difficoltosa utilizzando il modello simulativo: è infatti difficile ricostruire la serie storica dei combined ratio degli ultimi 15 anni, in quanto occorrerebbe effettuare ipotesi sull'andamento passato dei parametri utilizzati per le simulazioni.

Si può infatti osservare (figura 78) che, supponendo che l'impresa abbia una serie storica certificata di combined ratio e possa utilizzare un fattore di volatilità specifica<sup>103</sup> ed un coefficiente di credibilità pari a 1, si ottengono requisiti di capitale decisamente più contenuti ed in linea con il requisito ottenuto utilizzando l'approccio simulativo.

**Figura 78: Parametri stimati per le due linee di business e rbc/B ottenuti utilizzando la volatilità di mercato e quella stimata**

	lob1	lob2		Market	Insurance
size factor	2,236068	2,236068	st. deviation	0,288658558	0,158965255
volatility factor	0,125	0,25	volatility Scr	1,050418913	0,506514534
market st. deviation	28,0%	55,9%	risk Charge	27.095.759,51	13.632.642,44
insurance specific st. deviation	13,2%	32,5%	rbc/B	101%	46%

Tali risultati sono stati ottenuti ipotizzando assenza di correlazione tra i due rami, in quanto le specifiche del Ceiops prevedono correlazione pari a 0 tra i due rami esaminati<sup>104</sup>.

E', però interessante verificare il comportamento del requisito introdotto dal Qis2 al variare di determinati parametri per analizzarne la sensibilità rispetto all'approccio simulativo.

Analizzando singolarmente i diversi rami si osserva l'effetto marcato sul requisito di capitale del "size factor". La presenza di tale fattore tende a penalizzare le compagnie con raccolta premi al

<sup>103</sup> Il fattore di volatilità specifica è ottenuto considerando la standard deviation delle due linee sulla base degli stessi parametri utilizzati per il modello simulativo (vedi figura 34).

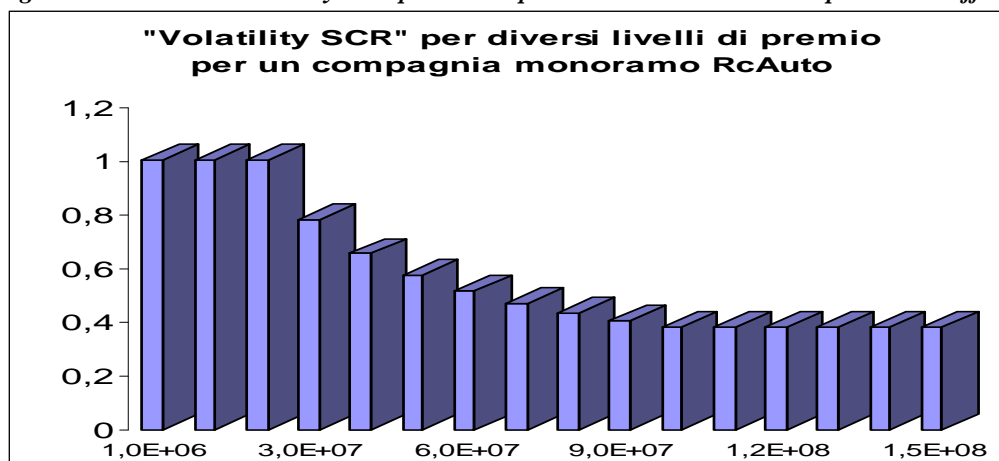
<sup>104</sup> La matrice di correlazione prevista nel Qis2 prevede infatti correlazione pari a 0 tra il ramo 2 (Motor 3rd Party) e il ramo 6 (Liability 3rd party).

loro della riassicurazione inferiore ai 20 milioni di Euro: si osserva infatti un identico caricamento per volatilità (vedi figura 79) per tutte le imprese con raccolta premi inferiori ai 20 milioni di Euro. Analogamente si osserva un identico requisito per le imprese con raccolta superiore ai 100 milioni di Euro. Il size factor si riduce infatti da un valore pari a 2,236 circa ad un valore pari a 1, portando ad una riduzione del volatility Scr per il ramo RcAuto dal 101% dei premi di tariffa al 38% degli stessi<sup>105</sup>.

Occorre inoltre rilevare che tale fattore è determinato sulla base dei premi al lordo della riassicurazione e per singolo ramo d'attività: di conseguenza un'impresa di grandi dimensioni potrebbe comunque avere un size factor pari a 2,236 per alcuni rami assicurativi.

Tale modalità di calcolo del size factor non considera dunque, né l'eventuale effetto positivo derivante da un'accurata modalità di riassicurazione, né la presenza di eventuali strutture e conoscenze delle imprese di grandi dimensioni che potrebbero ridurre la volatilità.

**Figura 79: Valore del volatility SCR per una impresa RcAuto al variare dei premi di tariffa**



L'effetto sul requisito del size factor si evince dall'analisi di un'impresa con raccolta premi più elevata (figura 80): l'approccio del Qis2 restituisce infatti un requisito del 35,5% lievemente superiore a quelli ottenuti, utilizzando il TailVar<sub>99%</sub>, col modello simulativo e con l'approccio dell'International Actuarial Association.

In particolare si osserva una riduzione del rapporto rbc su premi di tariffa per tutti gli approcci per effetto della riduzione del coefficiente di variabilità e dell'asimmetria del costo aggregato.

Il comportamento quasi simmetrico del costo aggregato dei sinistri (l'indice di asimmetria della X risulta in questo caso pari a 0,49) elimina i problemi di stima dell'approccio dell'International

<sup>105</sup> Il volatility Scr è ottenuto applicando la seguente trasformazione  $(0.99 - \Phi(N_{0.99} - \ln(x^2 + 1)^{1/2}) / 0.01$  alla standard deviation di mercato. La standard deviation di mercato, nel caso di un'unica linea di business, non è altro che il prodotto del size factor per la volatilità del ramo (per il ramo RcAuto pari a 12,5%). Il volatility Scr è espressione del requisito di capitale, in quanto nel caso venga esercitata un'unica linea di business il requisito viene ottenuto moltiplicando il volatility Scr per i premi di tariffa e sottraendo l'eventuale surplus del business futuro.

Actuarial Association e permette di ottenere requisiti molto vicini a quelli osservati con il modello simulativo.

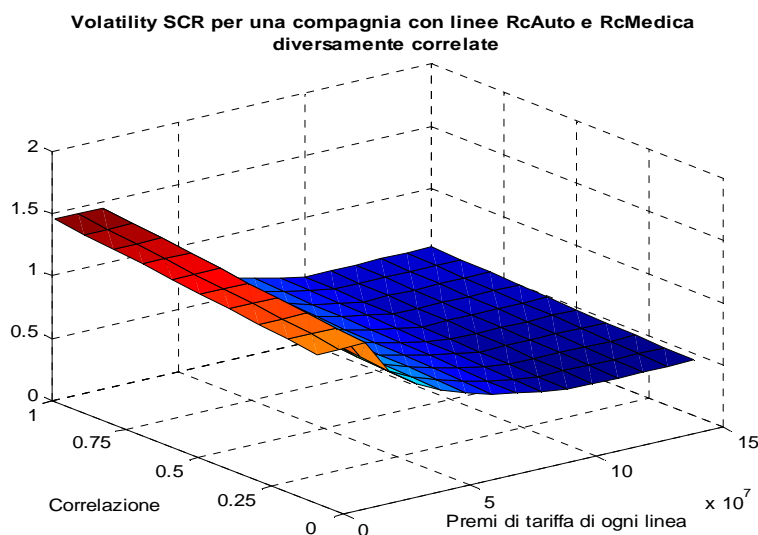
**Figura 80:  $Rbc/B$  per un'impresa con due linee indipendenti (RcAuto e RcMedica) con parametri identici al caso precedente (vedi figura 34) e con numero di sinistri di ogni linea 10 volte superiore (Premi totali pari a 250 milioni di Euro)**

	Approccio Simulativo		Approccio IAA		Qis2
	Var	TailVar	Var	TailVar	SCR
99,50%	30,74%	36,44%	30,19%	35,78%	39,60%
99%	26,22%	32,30%	26,06%	31,80%	35,50%
95%	16,26%	22,50%	15,59%	22,05%	25,10%

Anche nel caso vengano esercitati più rami assicurativi, il peso del size factor risulta sempre marcato. Anche la correlazione tra i due rami ha un peso non trascurabile sul requisito di capitale: l'effetto della correlazione appare particolarmente significativo per le imprese con minore raccolta premi. Il volatility Scr passa infatti da un valore di 116,3% in caso di indipendenza ad un valore di 145% in caso di piena correlazione per i portafogli più piccoli.

La variazione è più contenuta se consideriamo imprese con raccolta premi più elevata (per premi superiori a 100 milioni di euro si passa da un volatility del 43,6% in caso di indipendenza al 53% in caso di piena correlazione).

**Figura 81: Valore del volatility SCR per un'impresa che esercita rami RcAuto e RcMedica con identica raccolta premi, al variare dei premi di tariffa e del coefficiente di correlazione**



**Figura 82:  $Rbc/B$  per un'impresa con due linee correlate (RcAuto e RcMedica) con parametri identici al caso precedente (vedi figura 34) e con numero di sinistri di ogni linea 10 volte superiore (Premi totali pari a 250 milioni di Euro)**

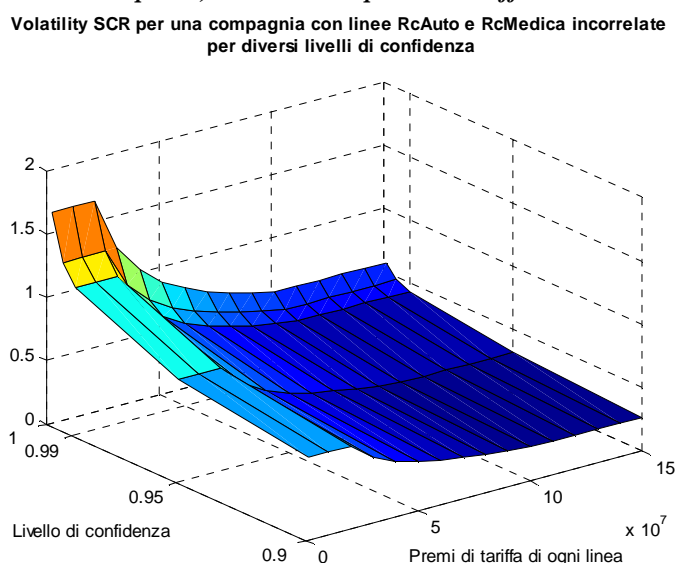
Misura	Approccio simulativo			QIS2	IAA		
	Tvar	Var	Tvar	SCR	Tvar	Var	Tvar
Livello di confidenza	99%	99,5%	99,5%	99,0%	99%	99,5%	99,5%
$Rbc/B$	37,9%	34,8%	43,8%	38,8%	37,1%	34,8%	42,3%

Anche in caso di correlazione, all'aumentare della numerosità dei sinistri in portafoglio, il peso del size factor diminuisce: in particolare si osserva che, considerando due linee positivamente correlate con raccolta premi totale pari a 250 milioni di Euro, l'approccio simulativo e l'approccio dell'IAA restituiscono requisiti di capitale quasi identici<sup>106</sup>. Il QIS2, calcolato ipotizzando una correlazione del 33% tra i due rami, permette di ottenere un requisito del 39% per il premium risk, in linea con i valori ottenuti con gli altri due approcci utilizzando il TailVar al 99%.

Infine, può essere interessante verificare la sensibilità del requisito al variare del livello di confidenza utilizzato dal Ceiops per il calcolo del volatility SCR: anche in questo caso le imprese di piccole dimensioni risultano le più sensibili alle variazioni di alfa.

Si osserva, infatti, una differenza del 4% tra l'SCR e l'identico requisito calcolato ad un livello del 99,5% per le imprese con due rami, entrambi con raccolta premi superiore a 100 milioni di Euro, e una differenza del 16% per le imprese con raccolta premi per entrambi i rami inferiore a 20 milioni di Euro.

**Figura 83: Valore del volatility SCR per un'impresa che esercita due rami indipendenti (RcAuto e RcMedica) con identica raccolta premi, al variare dei premi di tariffa e del livello di indipendenza**



## 4.8 Eventuali estensioni del modello

Nei paragrafi precedenti sono stati presentati i risultati derivanti dall'applicazione di un modello di simulazione del costo aggregato: in realtà, inizialmente, si è fatto riferimento al modello esteso relativo all'intera riserva di rischio, ma l'obiettivo della tesi, di analizzare l'impatto delle

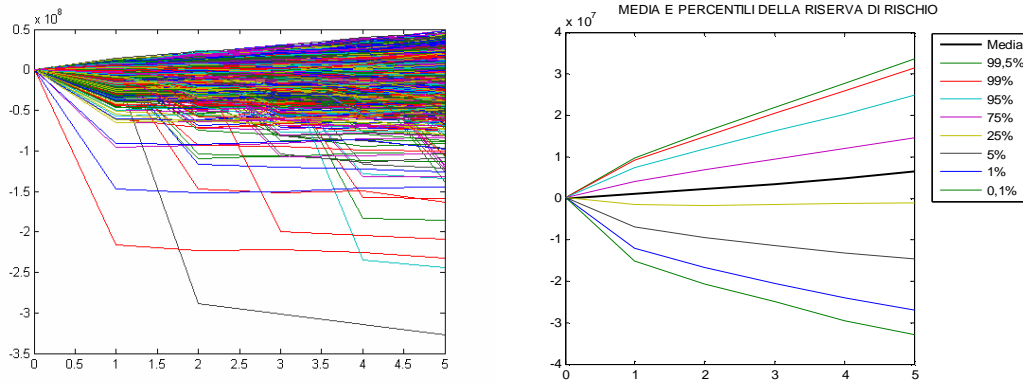
<sup>106</sup> Anche in questo caso l'asimmetria della distribuzione del costo aggregato (pari a 0,96) è decisamente più contenuta del caso standard analizzato in precedenza

correlazioni e di confrontare l'eventuale requisito ottenuto con le proposte del Ceiops e dell'IAA, ha portato a privilegiare l'analisi del costo aggregato dei sinistri.

La possibilità di sviluppo di un modello interno completo offre, in ogni caso, un'importante opportunità sia in un'ottica di individuazione di un requisito effettivamente correlato alla rischiosità dell'impresa ma anche nella prospettiva di una modalità di gestione del rischio basata sulla valutazione sia della rischiosità del portafoglio sia della sua redditività.

In questo senso, il requisito di capitale può essere calcolato direttamente sull'andamento della riserva di rischio, introducendo anche l'effetto dei rendimenti finanziari, ipotizzati costanti per semplicità nell'esempio seguente.

**Figura 84: Andamento della riserva di Rischio in caso di indipendenza tra i due rami (100.000 simulazioni)**



Considerando il portafoglio analizzato in precedenza è possibile ottenere i momenti, esatti<sup>107</sup> e simulati, del rapporto tra riserva di rischio e premi di tariffa, in caso di indipendenza tra i due rami, evidenziando nuovamente il buon adattamento del modello.

<sup>107</sup> Partendo dal risultato noto, in presenza di un unico ramo, si può ottenere la media del rapporto  $u_t$  in caso di due rami indipendenti:

$$E(\tilde{u}_t) = E\left(\frac{U_t}{B_t}\right) = \sum_{k=1}^{t-1} \left[ \lambda_{t-k}^* p_{t-k}^* \prod_{i=1}^k r_i^* \right]$$

dove:

$$\lambda_t^* = \frac{[\lambda_{1,t} P_{1,t} + \lambda_{2,t} P_{2,t}]}{P_{1,t} + P_{2,t}}, \quad p_t^* = \frac{[P_{1,t} + P_{2,t}]}{B_{1,t} + B_{2,t}} (1+j)^{0.5} \quad \text{e} \quad r_t^* = \frac{[B_{1,t-1} + B_{2,t-1}]}{B_{1,t} + B_{2,t}} (1+j)$$

Analogamente la varianza sarà:

$$Var(\tilde{u}_t) = \sum_{k=1}^{t-1} \left[ Var(x_{t-k}) q_{t-k}^* \prod_{i=1}^k (r_i^*)^2 \right] \quad \text{dove:} \quad q_t^* = \frac{(1+j)}{(B_{1,t} + B_{2,t})^2}$$

Ed infine il momento terzo sarà:

$$M^3(\tilde{u}_t) = - \sum_{k=1}^{t-1} \left[ (M^3(x_{1,t-k}) + M^3(x_{2,t-k})) (q_{t-k}^*)^{3/2} \prod_{i=1}^k (r_i^*)^3 \right]$$

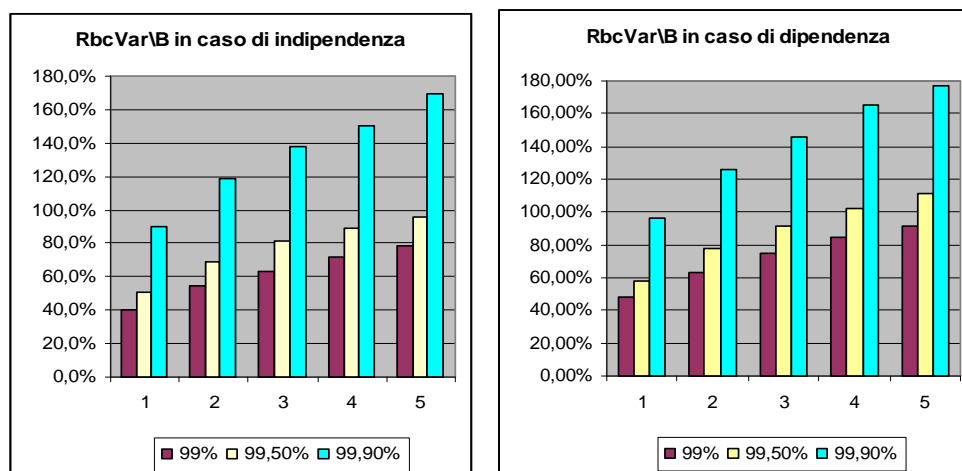
**Figura 85: Momenti simulati ed esatti del rapporto U/B (Riserva di Rischio su premi di tariffa) in caso di indipendenza tra i due rami (100.000 simulazioni)**

U/B					
Momenti Simulati			Momenti Esatti		
Media	St. dev.	Asimmetria	Media	St. dev.	Asimmetria
0,0411	0,162	-3,789	0,0417	0,1594	-5,1023
0,0808	0,224	-2,655	0,0823	0,2219	-3,5325
0,1206	0,273	-2,793	0,1217	0,2676	-1,9279
0,1588	0,308	-1,968	0,1599	0,3041	-1,2547
0,1962	0,339	-1,680	0,1970	0,3347	-0,8990

La modellizzazione dell'andamento della riserva di rischio permette di ottenere requisiti di capitale (vedi figura 86), che sono lievemente inferiori di quelli calcolati direttamente sul costo aggregato dei sinistri, per effetto dell'introduzione dei rendimenti finanziari.

Si osserva, infine, anche con questa metodologia l'incremento del requisito di capitale per effetto della correlazione tra i rami assicurativi: in particolare, incrementando l'orizzonte temporale e il livello di confidenza analizzato, si osserva un peso sempre più marcato della correlazione positiva tra i rami sul requisito di capitale.

**Figura 86: Requisito di capitale calcolato sulla riserva di rischio per diversi livelli di confidenza in caso di indipendenza e di correlazione tra i due rami**



Si tratta, dunque, di un approccio, che permette, simulando l'andamento nel tempo della riserva di rischio, di individuare un requisito di capitale correlato alla rischiosità dell'impresa. Occorre sottolineare, comunque, che tale modellistica può essere arricchita per considerare ulteriori aspetti che influiscono sull'andamento della riserva di rischio, alcuni, già citati in precedenza, come il ricorso alla riassicurazione, la dinamica degli investimenti e dei rendimenti finanziari e la presenza di sinistri catastrofici, altri come gli accantonamenti a riserva e gli effetti di eventuali tassazioni e dividendi.

## Conclusioni

L'analisi dell'impatto delle caratteristiche della rischiosità insita in ogni ramo assicurativo e delle eventuali correlazioni presenti tra i differenti rami esercitati permettono, come si è visto, di compiere analisi approfondite del comportamento del costo aggregato dei sinistri giungendo alla possibilità di approssimarne l'andamento.

La corretta determinazione della funzione di ripartizione della variabile aleatoria costo sinistri aggregato ha, dunque, un ruolo fondamentale nell'ambito della rischiosità e della solvibilità di una compagnia di assicurazioni contro i danni.

Dai primissimi studi di Campagne e De Mori, che hanno portato all'attuale formula del margine di solvibilità, alle recenti proposte fornite da diversi organismi internazionali, il costo aggregato ha rappresentato un elemento fondamentale in quanto, attraverso la determinazione di una funzione di esso, si può giungere alla determinazione di un idoneo requisito correlato alle caratteristiche dell'impresa.

In particolare, nell'ottica della revisione delle regole applicabili al settore assicurativo, si sono sviluppati un numero elevato di studi, basati su modellistiche più o meno complesse, che consentono un'analisi integrata dei rischi

Tale progetto, nato principalmente dalla condivisione diffusa dell'obsolescenza di quanto attualmente previsto dal Solvency I<sup>108</sup>, può essere interpretato come un processo di autoregolamentazione del mercato, destinato a rivedere profondamente l'intero processo aziendale delle compagnie operanti nella Ue.

La complessità del processo in atto deriva dal fatto che Solvency II si sovrappone ad incastro nella gestione del rischio a livello aziendale, osservando il fenomeno da un'altra prospettiva.

Solvency II potrà rappresentare, dunque, l'identificazione di un idoneo requisito di capitale ma anche, per chi saprà coglierla, un'importante opportunità di porre maggiore attenzione ed eventualmente rivedere il sistema di valutazione e di gestione dei rischi.

In ogni caso, sebbene numerosi passi siano stati fatti, il percorso del Solvency II è ancora lungo e occorrerà innanzitutto definire quali modalità utilizzare per la misurazione delle diverse componenti di rischio ed in particolare, dato l'oggetto della presente tesi, per la misurazione dell'underwriting risk.

La valutazione del costo aggregato, come sottolineato in precedenza, rappresenta una delle tante problematiche da risolvere: i modelli simulativi e il ricorso a distribuzioni, note in letteratura

---

<sup>108</sup> Si veda in proposito "Solvency II: Challenging Issue for Insurance Industry"

attuariale, rappresentano, infatti, solo alcune delle possibilità offerte negli anni per l'approssimazione del costo sinistri.

Il procedimento ricorsivo proposto da Panjer nel 1981<sup>109</sup> e il metodo della Fast Fourier Trasform<sup>110</sup> sono ulteriori tecniche, offerte negli anni, concernenti la modellizzazione del costo aggregato dei sinistri. L'introduzione dell'Extreme Value Theory<sup>111</sup> ha permesso, infine, uno studio accurato delle code delle distribuzioni, specialmente nel caso di asimmetria particolarmente elevata.

Nell'ambito dell'identificazione dell'idoneo requisito patrimoniale minimo sarà dunque importante la scelta dell'approccio da utilizzare per la valutazione del costo aggregato, innanzitutto con riferimento alla singola linea di business, ed in secondo luogo considerando le eventuali forme di dipendenza tra i rami nel processo di aggregazione.

La modalità a tre pilastri verso cui ci sta dirigendo porterà, molto probabilmente, alla definizione di una standard formula che cerchi di approssimare, meglio possibile, il *risk profile* dell'impresa, ma nello stesso tempo non introdurrà situazioni di complessità estrema che potrebbero penalizzare le imprese di piccole dimensioni.

La prima bozza di calcolo del requisito Scr, introdotta da Qis2, sembra muoversi proprio in quest'ottica, nonostante sia caratterizzata da numerose problematiche che probabilmente saranno ridiscusse già in fase di determinazione del prossimo studio di impatto quantitativo (Qis3).

Da una parte, infatti, la definizione dei *size factor* e dei parametri di volatilità di mercato potrebbero generare requisiti di capitale particolarmente elevati per le imprese di piccole dimensioni<sup>112</sup>, seppure tali requisiti potessero essere, in alcuni casi, effettivamente correlati alla rischiosità dell'impresa, dall'altra le imprese di maggiori dimensioni potrebbero non vedere considerate le strutture tecniche, il maggiore potere commerciale, l'eventuale ricorso alla riassicurazione, per i rami con minore raccolta premi<sup>113</sup>.

Sicuramente interessante risulta, inoltre, la possibilità di individuazione del requisito sulla base dei parametri di volatilità definiti dall'impresa stessa; occorrerà verificare se, almeno nel breve periodo, le imprese abbiano a disposizione le serie storiche dei combined ratio necessarie per tali valutazioni. In ogni caso la definizione di una formula valida per l'intero mercato Ue dovrà, per forza di cose, essere basata su coefficienti che, pur calibrati meglio possibile per descrivere i profili di rischio delle imprese, saranno in ogni caso frutto di mediazioni.

---

<sup>109</sup> Si veda in proposito Panjer [1981] e la versione relativa alla distribuzione di Poisson: Adelson (1966), "Compound poisson distributions", Operational Research Quarterly, 17

<sup>110</sup> Si veda in proposito Wang [1998]

<sup>111</sup> Si veda in proposito Embrechts, Kluppelberg, Mikosh [1997] e per un'interessante applicazione Cerchiara R. [2006]

<sup>112</sup> Si veda, ad esempio, il valore del 101% ottenuto per il rapporto Rbc/B, calcolato con l'approccio di mercato del Qis2, per il portafoglio esaminato

<sup>113</sup> Il size factor dipende, infatti, unicamente dai premi, al lordo riassicurazione, raccolti per il ramo in oggetto



La metodologia proposta dall'International Actuarial Association, partendo da un approccio sicuramente più vicino al modello collettivo della Teoria del rischio presentato da Lundberg nel 1909 e rivisto nel corso degli anni, offre una formula di calcolo decisamente più tecnica e che, nei casi analizzati, sembra più avvicinarsi ai risultati ottenuti col modello simulativo.

Anche in questo caso, alcuni aspetti potrebbero essere sicuramente discussi ed eventualmente rivisti: da una parte l'ipotesi di lognormalità della distribuzione del costo aggregato dei sinistri potrebbe non essere valida nella realtà per rami particolarmente asimmetrici portando ad una sottostima del requisito, soprattutto per livelli di confidenza più elevati e nel caso di utilizzo del TailVar come misura di rischio, dall'altra la mancata considerazione dei caricamenti nell'identificazione del requisito potrebbe essere interpretata come un'eccessiva penalizzazione per l'impresa<sup>114</sup>.

Alcune confronti<sup>115</sup> hanno comunque mostrato che su livelli di confidenza del 99% l'approccio IAA è in linea, per portafogli di grandi dimensioni, anche nel caso di dipendenza tra i rami, con i modelli simulativi implementati utilizzando la copula Gumbel.

Sembra dunque che, ad eccezione delle imprese più piccole e dei rami particolarmente asimmetrici, l'approccio basato sulla distribuzione Lognormale e sulla modellizzazione delle dipendenze attraverso il *covariance generator*  $\beta$ , sembra comunque allinearsi, almeno per livelli di confidenza del 99%, ai risultati ottenuti con i modelli simulativi con situazioni di dipendenza più estreme. Tale risultato rientrerebbe nell'ottica di una standard formula che eviti un'eventuale sottostima del capitale.

L'alternativa, al calcolo del requisito di primo pilastro attraverso una formula standard, sarà probabilmente offerta dai legislatori alle imprese attraverso la possibilità di sviluppo parallelo di adeguati modelli interni.

Lo sviluppo degli Internal Risk Model (IRM) è necessario, in aggiunta al primo pilastro, poiché non tutti i rischi possono essere adeguatamente individuati attraverso delle misure di natura quantitativa. Questa fase, che richiederà, in ogni caso, una revisione indipendente ed autonoma da parte dell'Autorità di vigilanza o di una terza parte qualificata, vuole garantire che l'assicuratore disponga del capitale adeguato a far fronte a tutti i rischi insiti nel suo business, ma vuole, anche, incoraggiare le compagnie ad utilizzare migliori tecniche di risk management in relazione al profilo di rischio ed al monitoraggio e alla gestione di questi rischi.

Questi modelli, dunque, che garantiscono maggiore flessibilità superando l'approccio rigido di una formula standard, non sempre adeguata per descrivere la complessità e la varietà del profilo di

---

<sup>114</sup> Il requisito di capitale è infatti ottenuto unicamente applicando il TailVar alla distribuzione lognormale senza sottrarre né i caricamenti di sicurezza incassati dall'impresa, né l'eventuale expected surplus.

<sup>115</sup> Vedi paragrafo 4.6 e 4.7

rischio delle compagnie, acquisteranno importanza non solo per l'analisi di solvibilità ma anche per assistere il management nella definizione delle strategie più appropriate.

L'approccio simulativo permette, innanzitutto la replicazione dell'andamento del costo aggregato, analizzando separatamente le due componenti principali (numero e costo) e valutando eventuali strutture di dipendenza. Si tratta di una metodologia sicuramente complessa e che richiede tempi e modalità di elaborazione particolarmente sofisticate ma che nello stesso tempo offre la possibilità di testare ipotesi variegata sia in termini di numero e di costo dei sinistri sia in termini di strutture di dipendenza.

Si è visto, con le analisi di sensitività<sup>116</sup>, come la scelta dei parametri e delle strutture di dipendenza può portare in alcuni casi anche a risultati molto diversi in termini di requisito di capitale: i modelli simulativi sono dunque uno strumento molto importante ma presuppongono sia un'adeguata calibratura dei coefficienti sui dati reali sia la disponibilità di serie storiche in alcuni casi anche particolarmente articolate.

Come già sottolineato, infatti, il modello utilizzato non è altro che una versione relativamente semplificata del modello più complesso che dovrebbe essere considerato per la valutazione completa dell'underwriting risk, ma si è preferito estendere la propria analisi unicamente agli aspetti fondamentali del business assicurativo.

A questo riguardo, l'analisi potrebbe essere estesa considerando l'effetto di eventuali rendimenti finanziari stocastici<sup>117</sup>, di eventuali coperture riassicurative<sup>118</sup> e derivante dal verificarsi di eventuali sinistri catastrofali<sup>119</sup>, la presenza di regole dinamiche per la determinazione dei dividendi e dei caricamenti di sicurezza<sup>120</sup>, la presenza di eventuali cicli di lungo termine che influenzino il business assicurativo e l'andamento degli investimenti finanziari.

Inoltre, il profilo di rischio della compagnia comprende l'analisi di ulteriori fattori di rischio<sup>121</sup>, ognuna delle quali richiede un modello ad hoc per la valutazione.

Per giungere alla valutazione del requisito di capitale attraverso modelli interni occorrerà, dunque, sviluppare un modello che consideri separatamente le diverse fonti di rischio e proceda all'aggregazione di queste definendo apposite strutture di dipendenza.

Un modello di questo tipo risulta particolarmente complesso ed articolato e richiederà un'elevata disponibilità, in termini di mezzi tecnici, di conoscenze, tecniche ed informatiche, e di dati, sia per

---

<sup>116</sup> Vedi paragrafo 4.5

<sup>117</sup> Si veda in proposito Savelli e Ballotta [2005]

<sup>118</sup> Si veda in proposito Savelli [2003]

<sup>119</sup> Si veda in proposito Savelli e Rytgaard [2004]

<sup>120</sup> Si veda in proposito Savelli e Ballotta [2005]

<sup>121</sup> Ad esempio l'IAA individua la seguente classificazione dei rischi: Underwriting Risk, Market Risk, Credit Risk, Operational Risk, Liquidity Risk, Event Risk all'interno dei quali esistono rischi specifici, in alcuni casi caratterizzati da reciproche dipendenze. Si veda in proposito IAA [2004]

l'implementazione sia per l'elaborazione dello stesso, in quanto si è osservato che si ottengono risultati attendibili con un numero di simulazioni abbastanza elevato<sup>122</sup>.

Alla luce di tutto ciò, occorrerà a mio avviso, da una parte, identificare una standard formula che, per quanto possibile, riesca maggiormente ad identificare il profilo di rischio della compagnia, e sembra che l'approccio IAA con alcune correzioni, garantisca una buona approssimazione almeno per l'underwriting risk, dall'altra lo sviluppo dei metodi simulativi, ovviamente opportunamente regolati e regolamentati dall'Autorità di Vigilanza, rappresenteranno sicuramente una metodologia importante di gestione del rischio, identificando quest'ultimo non solo con un'accezione negativa ma anche come un'importante possibilità di cogliere delle opportunità.

Un aspetto delicato sarà, infine, rappresentato dalla valutazione delle dipendenze, sia derivante alla gestione di diversi rami assicurativi, analizzata nella presente tesi, sia derivante dalle diverse tipologie di rischio che gravano sull'impresa.

Ad esempio per quanto riguarda l'undewriting risk, si è osservato sia, che la scelta della struttura di dipendenza non è trascurabile e che le diverse copule sono in grado di identificare comportamenti molto diversi del costo aggregato soprattutto sulle code delle distribuzioni, sia che, a seconda delle caratteristiche del portafoglio, il peso della correlazione sul numero dei sinistri e/o sul costo dei sinistri può essere più o meno marcato.

Nell'implementazione dei modelli interni sarà dunque auspicabile definire la struttura di dipendenza più adatta alla luce di un'analisi attenta ed accurata delle serie storiche, nella definizione della standard formula occorrerà individuare metodologie di valutazione delle dipendenze che, qualora si basino sulla semplificazione derivante dall'utilizzo del classico coefficiente di correlazione lineare, propendano per una scelta conservativa evitando di sottostimare l'effetto, non sempre trascurabile, delle dipendenze sul requisito di capitale.

---

<sup>122</sup> Vedi paragrafo 4.2

## Bibliografia

- ACERBI C., TASCHE D. [2002], “On the Coherence of Expected Shortfall”, *Journal of Banking e Finance*, n.26
- ACERBI C., TASCHE D. [2001], “Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk”
- ACERBI C. [2001], “Risk Aversion and Coherent Risk Measures: a Spectral Representation Theorem”
- ARMSTRONG M. [2003], “Copula Catalogue. Bivariate Archimedean Copulas”, *CERNA*
- ARTZNER P. [1999], “Application of Coherent Risk Measures to Capital Requirements in Insurance”, *North American Actuarial Journal* pag. 11-26
- ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J-M., HEATH D. [1999], “Coherent Measures of Risk”, *Mathematical Finance* 9 pag. 203-228
- CARRIERE J. [1994], “Estimation of a Multivariate Copula”, *Actuarial Research Clearing House* vol.2
- CEA, “Solvency Assessment Models Compared”, *CEA Solvency II Steering Group*
- CEIOPS [2006], “Quantitative Impact Study n.2: Technical Specification”, *CEIOPS*, PI-08/06, 22.03.06 e Versione Finale Maggio 2006
- CEIOPS [2006], “QIS1- Summary Report”, *CEIOPS*, FS-01/06
- CEIOPS [2005], “Summary on Comments on CEIOPS-CP-04/05”, *CEIOPS*, SEC-86/05
- CEIOPS [2005], “Draft Answers to the European Commission on the first wave of Call for Advice in the framework of Solvency II project”, *Consultation Paper* n.4
- CEIOPS [2005], “Draft Answers to the European Commission on the second wave of Call for Advice in the framework of Solvency II project”, *Consultation Paper* n.7
- CEIOPS [2005], “Draft Answers to the European Commission on the third wave of Call for Advice in the framework of Solvency II project”, *Consultation Paper* n.9
- CERCHIARA R. [2006] “Metodo Simulativo, Fast Fourier Trasform ed Extreme Value Theory per l’analisi del costo sinistri aggregato nelle assicurazioni danni”, *Tesi di Dottorato in Scienze Attuariali XVIII ciclo, Università la Sapienza Roma*
- CLEMENTE G. P. & PARRINI C. [2006], “A Risk analysis in Fire Insurance”, *XIII Convegno di Teoria del Rischio, Campobasso*
- DAYKIN C. D., PENTIKAINEN T., PESONEN M. [1994], “Practical Risk Theory for Actuaries”, *Chapman e Hall*
- DE MARTA S. & McNEIL A. [2004], “The t-Copulas and Related Copulas”, *ETHZ Zurich*
- DELBAEN F. [2000], “Coherent risk measures”, *Pisa, 28 Febbraio-10 Marzo*

- DELBAEN F. [1998], “Coherent risk measures on general probability spaces”, *Working Paper,ETH Zurigo*
- DE FELICE M. e MORICONI F. [2006], “Modelli per il risk Management”, *Corso Irsa-Ania, Novembre 2006*
- EMBRECHTS P., FREY R., McNEIL A. [2005], “Quantitative Risk Management”, *Princeton Series in Finance, Princeton*
- EMBRECHTS P., McNEIL A., LINDSKOG P. [2001], “Modelling dependence with copulas and Applications to Risk Management”, *ETHZ Zurich*
- EMBRECHTS P., McNEIL A., STRAUMANN D. [1998], “Correlation and dipendence in risk management: properties and pitfalls”, *Swiss Federal Institute of Technology Zurich*,
- EMBRECHTS P., KLUPPELBERG C., MIKOSCH T. [1997], “Modelling extremal events”, *Springer Verlag, Berlino*
- European Commission [2005], “Solvency II Roadmap – Towards a framework directive”, *MARKT2502/05 del 8 Aprile 2005 e Updated Version MARKT2502/05 rev.2 – del Luglio 2005*
- European Commission [2004], “Framework for consultation on Solvency II”, 14 Luglio
- European Commission [2003], “La concezione di un futuro sistema di vigilanza prudenziale nella UE”, *Nota Elaborata dai Servizi della commissione*, 3 Marzo
- European Commission [2001], “Nota per il sottogruppo Solvibilità del Comitato delle Assicurazioni, Solvibilità II Presentazione dei lavori previsti” , *MARKT/2027/01*, 13 Marzo
- European Commission [2001], “Risk Based Capital systems”, *MARKT/2085/01*, 11 Ottobre
- FAIVRE F. [2003], “Copula: a new vision for economic capital and application to a four line of business company”, *ASTIN Conference*, 24-27 Agosto, Berlino
- FILIPOVIC D. [2004], “Swiss Solvency Test”, *Frankfurt MathFinance Workshop*, Aprile
- FELDBLUM S. [1996], “NAIC Property/Casualty Insurance Company Risk Based Capital Requirements”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society, LXXXIII*,297-418
- FREES E. W. e VALDEZ E. [1998], “Understanding relationships using copulas”, *North American Actuarial Journal*, vol.2
- FSA [2004], “Integrated Prudential sourcebook for insurers”, *Policy statement 04/16*, Giugno
- FSA [2003], “Enhanced Capital Requirements and Individual Capital Assessments for Non-life Insurers”, *Consultation Paper n.190*, Luglio
- FU L., MUTUAL G., MONCHER R., WEST B. [2004], “Severity distributions for GLM’s: Gamma or LogNormal?”, *Cas Spring Meeting, Colorado*

- HECKMAN P. & MEYERS G. [1983], “The Calculations of Aggregate Loss Distributions from Claims Severity Distributions and Claim Count Distributions”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society LXX*
- HOGG R.V. & KLUGMAN S. [1984], “Loss Distribution”, *Ed. Wiley and Sons*, New York,
- KELLER P. [2005], “Swiss Solvency Test”, *Federal Office of Private Insurance*, Lucerna 22 Novembre
- KLUGMAN S.A., PANJER H.H., WILMOT G.E. [1998], “Loss Models: From Data to Decisions”, *John Wiley & Sons*
- KPMG [2002], “Study into the methodologies to assess the overall financial position of an insurance undertaking from the perspective of prudential supervision”, *European Commission*, Maggio
- IAA [2003], “A Global Framework for Insurer Solvency Assessment”, Maggio
- IAA [2002], “Report of Solvency Working Party”, Febbraio
- IAIS [2002], “Principles on Capital Adequacy and Solvency”, Gennaio
- ISVAP [1999], “Il margine di solvibilità delle imprese di assicurazione: confronto tra i sistemi europeo ed americano”, *Quaderno Isvap n.6*
- LUDER T. [2005], “Swiss Solvency Test in Non-Life Insurance”, *36<sup>th</sup> International Astin Colloquium*, Zurigo Settembre
- MEYERS G. [2005], “On predictive Modelling for claim severity”, *CARe Seminar*
- MEYERS G. [2004], “Risk Based Capital Case-Study for General Insurance”, *CAS Spring Meeting*, 16-19 Maggio
- MEYERS G. [2003], “Risk Based Capital Developments”, *CAS/SOA Enterprise Risk Management Symposium*, 29 Luglio
- MEYERS G., KLINKER F., LALONDE D. [2003], “The Aggregation and Correlation of Insurance Exposure”, *CAS Forum*
- MEYERS G. [2001], “Coherent Measures of risk. An Exposition for the Lay Actuary”, *CAS Seminar on Dinamic Financial Analysis*, 8 Giugno
- MEYERS G. [1999], “Estimating Between Line Correlation Generated by Parameter Uncertainty”, *CAS Forum*
- MEYERS G. [1999], “A Discussion of Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms, by Shaun Wang”, *Proceedings of Actuarial Society*
- MEYERS G. & SCHENKER N. [1982], “Parameter uncertainty in the collective risk model”, *Pricing, Underwriting And Managing the Large Risk, CAS Discussion Paper Program* p.253

- MCNEIL A. [1997], “Estimating the tails of the loss severity distributions using extreme value theory”, *Astin Bulletin* 27, pag. 117-137
- NELSEN R.[2006], “An Introduction to Copulas”, *Lecture Notes in Statistics, Springer New York*, 1999 e 2006 (First e Second Edition)
- PANJER H.[1981], “Recursive evaluation of a family of compound distributions”, *Astin Bulletin* n.12
- PELISSONI R. e VICIG. P. [2001], “Coherent risk measures and imprecise provisions”, *Proc. ISIPTA '01, Ithaca*, Giugno 2001, 307-315
- RAU-BREDOW H. [2002], “Value at Risk, Expected Shortfall and Marginal Risk Contribution”, Maggio
- ROMANO C. [2001], “Applicazione della funzione Copula alla misurazione del rischio”, *Estratto Tesi di Dottorato*, 2001
- SAVELLI N. & BALLOTTA L.[2005], “Risk Based capital modelling for P&C insurers and financial sensitivity”, Luglio
- SAVELLI N.[2005], “Solvency II in Europe and Internal Risk Modelling”, *CAS Spring Meeting*, Maggio
- SAVELLI N. & RYTGAARD M. [2004], “Risk-Based Capital Requirements for Property And Liability Insurers According to Different Reinsurance Strategies and The Effect on Profitability”, *Proceedings of XXXV Astin Colloquium*, Bergen
- SAVELLI N.[2003], “A Risk Theoretical Model for Assessing The Solvency Profile of a General Insurer”, *Proceedings of XXXIV Astin Colloquium*, Berlino
- SFOPI [2004], “White Paper of the Swiss Solvency Test”, *Swiss Federal Office of Private Insurance*, Novembre
- “Solvency II: Challenging for Insurance Industry”, *De Finetti's Day*, 23 Novembre 2005
- STRASBURGER D. & PFEIFER D. [2005], “Dependence Matters” *36<sup>th</sup> International ASTIN Colloquium*, 4-7 Settembre 2005 Zurigo
- TASCHE D.[2002], “Expected Shortfall and beyond”, 20 Ottobre
- VENTER G. [1982], “Trasformed Beta and Gamma distributions and Aggregate Loss”, *Pricing, Underwriting and Managing the Large Risk, CAS Discussion Paper Program* p.395
- WANG S. [1998], “Aggregation of correlated risk portfolios: models and algorithms”, *Proceedings of the Casualty Actuarial Society*, LXXXV,848-939
- WANG S. “A Risk Measure that Goes Beyond Coherence”
- Watson Wyatt LPP [2003], “Calibration of the general insurance risk based capital model”, *FSA*, 25 Luglio

- WIRCH J.L. & HARDY M. R., “Distortion risk measures: Coherence and stochastic dominance”,
- WYMAN M. O.[2005], “Essential groundwork for the Solvency II project”, *CEA*
- WUTHRICH M.[2005], “On risk-adjusted solvency requirements in non-life insurance”, *Eth Zurich*, 7 Novembre
- WOLF R. & NICE C.[2004], “The Naic Risk-Based-Capital Formula Revisited”, *CAS Spring Meeting*, 16-19 Maggio